1. Soit $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ une matrice diagonale de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $D^2 = I_2$ Par produit matriciel,

$$D^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par identification, $a^2 = b^2 = 1$ donc $a = \pm 1$ et $b = \pm 1$. Ainsi

$$D \in \left\{ I_2; -I_2; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Réciproquement, on vérifie que ces quatre matrices sont bien des matrices diagonales dont le carré vaut I_2. Ainsi l'ensemble des matrices D diagonales telles que $D^2 = I_2$ est

$$\left\{ I_2; -I_2; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Posons $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, alors K est non diagonale et par produit matriciel, $K^2 = I_2$ [1].
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose [2] $T_x = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors par produit matriciel ${T_x}^2 = 0_2$, donc $T_x \in R(0_2)$. Comme $(T_x)_{x\in\mathbb{R}}$ est une famille de matrices deux à deux distinctes et qu'il y a une infinité de réels, on peut dire que $R(0_2)$ contient un nombre infini de matrices.
4. En calculant un déterminant par blocs, $\chi_A = X(X-1)(X-4)$. Ainsi, χ_A est scindé à racines simples dont diagonalisable.
5. Après calcul [3], $E_0(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_4(0) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Donc on peut prendre $v_1 = (1, -2, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, -2, 0)$. Ainsi, (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f. De plus, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
6. $A^m = PD^mP^{-1}$. On peut le démontrer par récurrence sur m [4].
7. Calculer P^{-1}, puis A^m.
8. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commute avec D. On a alors $MD = DM$ soit

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$$

Par identification, $b = c = d = f = g = h = 0$ c'est-à-dire M est diagonale. Réciproquement, si M est diagonale, comme deux matrices diagonales commutent, $MD = DM$. Ainsi l'ensemble des matrices qui commutent avec D est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
9. Par associativité du produit matriciel $HD = H(H^2) = H^3$ tandis que $DH = (H^2)H = H^3$. On a ainsi prouvé que si $H^2 = D$ alors $HD = DH$ c'est-à-dire H et D commutent.

---

1. Comment on a trouvé un tel K ? En cherchant K tel que $\chi_K = X^2 - \text{tr}(K)X + \det(K) = X^2 - 1$. Donc en cherchant K tel que $\text{tr}(K) = 0$ et $\det(K) = -1$. Autant prendre K une matrice dont la diagonale ne contient que 0 ainsi sa trace est nulle, puis prendre le reste des coefficients de sorte que son déterminant vaut -1. Mais notez qu'on a pas besoin d'expliquer tout ça sur la copie. Donner directement le bon K et calculer son carré suffit sur la copie.
2. Comment on a fait pour y penser ? On a considéré $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure, en résolvant $T^2 = 0_2$, on a compris qu'il était nécessaire et suffisant que $a = c = 0$. Encore une fois, pas besoin d'expliquer tout ça, il suffit de poser les matrices qui conviennent et bien justifier qu'il y en a une infinité.
3. On ne sait jamais à quel point un sujet veut que vous détaillez les calculs, on peut donc conseiller de détailler le calcul d'au moins un espace propre.
4. Mais c'est du cours et ce n'est pas à refaire à mon avis.

10. Soit $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, alors d'après la question 9, H et D commutent. D'après la question 8, on peut en conclure que H est diagonale. Ainsi, $H = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Or $D = H^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$, par identification, $a^2 = 0$, $b^2 = 1$ et $c^2 = 4$. Ainsi, $a = 0$, $b = \pm 1$ et $c = \pm 2$.
    On a donc démontré que si $H \in R(D)$, alors $H \in F$ avec F l'ensemble suivant :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

    On a ainsi montré que $R(D) \subset F$. Or en élevant toutes les matrices de F au carré, on constate que $F \subset R(D)$. Ainsi, $R(D) = F$. Et $\text{Card}(R(D)) = \text{Card}(F) = 4$.
11. Après calcul, $\chi_A = (X-1)^2(X-4)$. Ainsi, $\lambda = 1$ (racine double) et $\mu = 4$ (racine simple).
12. Par récurrence sur m, $J^m = 3^{m-1}J$.
13. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $A = J + I_3$, or J et I_3 commutent, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} A^m &= (J+I_3)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} J^k {I_3}^{m-k} = I_3 + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^{k-1} J \\ &= I_3 + \left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^{k-1} \right) J \end{aligned}$$

    Il reste à calculer cette somme, on reconnaît presque un binôme de Newton entre 3 et 1, on va donc compléter :

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^{k-1} = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^k 1^{m-k} \right) = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 3^k 1^{m-k} - 1 \right) = \frac{1}{3}(4^m - 1)$$

    On a donc démontré que, pour $m \geqslant 1$,

$$A^m = I_3 + \frac{1}{3}(4^m - 1)J$$

    On remarque que pour $m = 0$, $A^m = I_3$ et $4^m - 1 = 0$, ainsi la relation est encore vraie pour $m = 0$.
14. D'après la question précédente, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$A^m = (I_3 - \frac{1}{3}J) + 4^m \left(\frac{1}{3} J \right)$$

    Posons $B = I_3 - \frac{1}{3}J$ et $C = \frac{1}{3}J$ et en se rappelant que $\mu = 4$ et $\lambda = 1$, on a pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A^m = \mu^m B + \lambda^m C$. Soit $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$. Supposons $\beta B + \gamma C = 0_3$. En identifiant sur la première ligne première colonne, on a $\frac{2}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma = 0$ et sur la première ligne deuxième colonne, on a $-\frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma = 0$. Donc $\beta = \gamma$. En reportant dans la première équation, on a $1 \times \beta = 0$. Soit $\beta = 0$ puis $\gamma = 0$. On a ainsi montré que (B, C) est une famille libre.
15. En effectuant les produits matriciels, on trouve $B^2 = B$, $C^2 = C$, $BC = CB = 0_3$. Soit $H \in \text{vect}(B, C)$ qui vérifient $H^2 = A$, il existe $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que $H = \beta B + \gamma C$, alors

$$B + 4C = H^2 = (\beta B + \gamma C)^2 = \beta^2 B^2 + \beta\gamma BC + \gamma\beta CB + \gamma^2 C^2 = \beta^2 B + \gamma^2 C$$

    Ainsi, comme (B, C) on peut en conclure que $\beta^2 = 1$ et $\gamma^2 = 4$. Dès lors, $\beta = \pm 1$ et $\gamma = \pm 2$. Ce qui prouve que

$$H \in \{B + 2C; B - 2C; -B + 2C; -B - 2C\}$$

    Réciproquement ces matrices sont bien combinaison linéaire de B et C et par un produit matriciel leur carré vaut bien A.

16. Montrer que A est diagonalisable et diagonalisez-là (déterminer une matrice de passage ainsi que la matrice diagonale et la relation qui relient ces matrices à A). $E_1(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ et $E_4(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, ainsi $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

17. Posons $Y = \left(\begin{array}{c|c} K & 0 \\ \hline 0 & 2\end{array}\right) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Alors $Y^2 = D$ et Y n'est pas diagonale.

18. Comme $A = PDP^{-1}$, on pose $H = PYP^{-1}$, alors
$$H^2 = (PYP^{-1})(PYP^{-1}) = PY^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$$
Cependant, par un calcul direct de H, on peut vérifier que H n'est pas une des quatre matrices trouvées à la question 15, ainsi, $H \notin \text{vect}(B, C)$.

19. Comme A est diagonalisable et que $\text{Sp}(A) = \{1, 4\}$, $(X-1)(X-4)$ est un polynôme annulateur de A. Soit $R \in R(A)$, alors $R^2 = A$. Donc $(A - I_3)(A - 4I_3) = 0_3$, donc $(R^2 - I_3)(R^2 - 4I_3) = 0_3$. Donc $P = (X^2-1)(X^2-4)$ est un polynôme annulateur de R. Or, $P = (X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$ est scindé à racines simples, ainsi R est diagonalisable.

Partie II

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et P et Q deux matrices non nulles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que :
$$\lambda \neq \mu \qquad I_n = P + Q \qquad A = \lambda P + \mu Q \qquad \text{et} \qquad A^2 = \lambda^2 P + \mu^2 Q$$

20. On développe l'expression proposée et on remplace A^2 et A par leurs expressions fournies :
$$\begin{aligned}(A - \lambda I_n) \times (A - \mu I_n) &= A^2 - \lambda A - \mu A + \lambda\mu I_n\\ &= A^2 - (\lambda + \mu)A + \lambda\mu I_n\\ &= (\lambda^2 P + \mu^2 Q) - (\lambda + \mu)(\lambda P + \mu Q) + \lambda\mu I_n\\ &= \lambda^2 + \mu^2 Q - \lambda^2 P - \mu^2 Q - \lambda\mu Q - \mu\lambda P + \lambda\mu_I n\\ &= \lambda\mu(I_n - P - Q)\\ &= 0_n\end{aligned}$$
On en déduit que si $R = (X-\lambda)(X-\mu)$, alors $R(A) = (A - \lambda I_n)(A - \mu I_n) = 0_n$. On constate que R est un polynôme annulateur de A. De plus, R est scindé à racines simples. Ce qui prouve que A est diagonalisable.

21. Les racines de P sont λ et μ. Donc d'après le cours, $\text{Sp}(A) \subset \{\lambda, \mu\}$. Supposons que λ ne soit pas valeur propre. Ainsi, $A - \lambda I_n$ est inversible, en multipliant par son inverse dans $(A - \lambda I_n)(A - \mu I_n) = 0_n$, on en déduit que $A = \mu I_n = \lambda P + \mu Q = \lambda(I_n - Q) + \mu Q$. Soit encore $(\mu - \lambda)I_n = (\mu - \lambda)Q$. En simplifiant par $\mu - \lambda \neq 0$, on en déduit que $Q = I_n$. Ainsi, $I_n = P + Q = P + I_n$. Donc $P = 0_n$ ce qui est absurde. Ceci prouve que $\lambda \in \text{Sp}(A)$, pour exactement les mêmes raisons, $\mu \in \text{Sp}(A)$. On peut donc en conclure que $\text{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$.

22. En remplaçant A par $\lambda P + \lambda Q$ et I_n par $P + Q$ dans l'expression de la question 20, on trouve
$$0_n = (\lambda P + \mu Q - \lambda(P+Q))(\lambda P + \mu Q - \mu(P+Q)) = -(\mu - \lambda)^2 QP$$
Comme $\lambda - \mu \neq 0$, on peut diviser par $-(\mu - \lambda)^2$, on peut en déduire que $QP = 0_n$. De même, comme $A - \lambda I_n$ et $A - \mu I_n$ commutent (matrices polynômes en A), alors $(A - \mu I_n)(A - \lambda I_n) = 0_n$ en redéveloppant, on en déduira que $PQ = 0_n$. Comme $I_n = P + Q$, en multipliant par P à gauche, on obtient $P = P^2 + QP$, comme $QP = 0_n$, on en déduit que $P = P^2$. En multiplant par Q à gauche dans $I_n = P + Q$, on en déduira que $Q = Q^2$.

23. Comme $\lambda\mu \neq 0$, on en déduit que $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$. Posons[5] $B = \lambda^{-1}P + \mu^{-1}Q$, alors

$$AB = (\lambda P + \mu Q)(\lambda^{-1}P + \mu^{-1}Q) = P^2 + \mu\lambda^{-1}QP + \lambda\mu^{-1}PQ + Q^2 = P + Q = I_n$$

Ceci prouve que A est inversible et que $A^{-1} = B = \lambda^{-1}P + \mu^{-1}Q$.

24. Posons l'hypothèse de récurrence : $\mathscr{P}(m)$: «$A^m = \lambda^m P + \mu^m Q$ et $A^{-m} = \lambda^{-m}P + \mu^{-m}Q$».
   - $\mathscr{P}(0)$ est vraie, car $A^0 = I_n$ tandis que $\lambda^0 P + \mu^0 Q = P + Q = I_n$.
   - Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(m)$ vraie, alors

     $$A^{m+1} = A^m A = (\lambda^m P + \mu^m Q)(\lambda P + \mu Q) = \lambda^{m+1}P^2 + \mu^{m+1} + \lambda^m \mu PQ + \mu^m \lambda QP = \lambda^{m+1}P + \mu^{m+1}Q$$

     Tandis que

     $$\begin{aligned} A^{-m-1} &= A^{-m} \times A = (\lambda^{-m}P + \mu^{-m}Q)(\lambda^{-1}P + \mu^{-1}Q) \\ &= \lambda^{-m-}P^2 + \mu^{-m-1} + \lambda^{-m}\mu^{-1}PQ + \mu^{-m}\lambda^{-1}QP \\ &= \lambda^{-m-1}P + \mu^{-m-1}Q \end{aligned}$$

   - Par principe de récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(m)$ est vraie.

25. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Supposons $\alpha P + \beta Q = 0_n$. Si on multiplie par P, on obtient $\alpha P^2 + \beta QP = 0_n$. Donc $\alpha P = 0_n$. Comme P est une matrice non nulle, donc $\alpha = 0$. Ainsi, $\beta Q = 0_n$. Comme Q est non nulle, $\beta = 0$. On a ainsi, montré que (P, Q) est une famille libre, comme $F = \text{vect}(P, Q)$, (P, Q) est une famille génératrice de F. Donc c'est une base et $\dim(F) = 2$.

26. Soit $M \in R(A) \cap F$, alors $M^2 = A$ et il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \alpha P + \beta Q$. En élevant au carré, on a

$$\lambda P + \mu Q = A = M^2 = (\alpha P + \beta Q)^2 = \alpha^2 P^2 + \alpha\beta PQ + \beta\alpha QP + \beta^2 Q^2 = \alpha^2 P + \beta^2 Q$$

Comme (P, Q) est une famille libre, on peut identifier, ainsi $\alpha^2 = \lambda$ et $\beta^2 = \mu$. Comme on a supposé que $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, on en déduit que $\alpha = \pm\sqrt{\lambda}$ et $\beta = \pm\sqrt{\mu}$. Ainsi,

$$M \in \left\{\sqrt{\lambda}P + \sqrt{\mu}Q; \sqrt{\lambda}P - \sqrt{\mu}Q; -\sqrt{\lambda}P + \sqrt{\mu}Q; -\sqrt{\lambda}P - \sqrt{\mu}Q\right\}$$

Réciproquement, on constate que les quatre matrices sont bien dans F et en les élevant au carré, on constate qu'elles sont bien dans $R(A)$. On a donc montré que

$$R(A) = \left\{\sqrt{\lambda}P + \sqrt{\mu}Q; \sqrt{\lambda}P - \sqrt{\mu}Q; -\sqrt{\lambda}P + \sqrt{\mu}Q; -\sqrt{\lambda}P - \sqrt{\mu}Q\right\}$$

27. Posons

$$K = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ \hline 0 & I_{p-2} \end{array}\right)$$

Alors K est non diagonale et par un produit de matrices diagonales par blocs, $K^2 = I_k$.

28. Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à 2, alors il existe $P' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\backslash F$ tel que $P'^2 = P$ et $P'Q = QP' = 0_n$.

29. En déduire que si $n \geqslant 3$, alors $R(A) \not\subset F$.

Partie III

À partir de maintenant, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension fine n, $\mathscr{L}(E)$ désigne les endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs. On note 0 l'endomorphisme nul et Id l'application identité. Pour tout endomorphisme f, $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ désigneront respectivement le noyau et l'image de f. L'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\text{Sp}(f)$. On considère l'ensemble des endomorphismes dont le carré vaut f :

$$R(f) = \{h \in \mathscr{L}(E) \mid h^2 = f\}.$$

Si $f_1, \ldots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^*$) alors $\prod_{1 \leqslant i \leqslant q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \cdots \circ f_q$.

Soit f un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

5. Pourquoi on suspecte que le B qu'on a posé est l'inverse de A ? Car c'est ce que suggère la question suivante.

30. Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre. En déduire que $p \leqslant n$ et que $f^n = 0$.
31. Montrer que si $R(f) \neq \varnothing$, alors $2p - 1 \leqslant n$.
32. Déterminer les réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + O(x^n)$ au voisinage de 0. Dans la suite, P_n désigne le polynôme défini par $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
33. Montrer qu'il existe une fonction η bornée au voisinage de 0 telle que l'on ait $P_n^2(x) - x - 1 = x^n \eta(x)$. En déduire que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.
34. Montrer alors que $R(f + \mathrm{Id}) \neq \varnothing$.
Plus généralement, montrer que pour tout réel α réel, $R(\alpha f + \mathrm{Id}) \neq \varnothing$, puis que pour tout β réel strictement positif, $R(f + \beta \mathrm{Id}) \neq \varnothing$.

Soit $T = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel λ.

35. Montrer que $(T - \lambda I_n)^n = 0$.

On suppose dans les deux questions suivantes que f est un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé et qui n'admet qu'une seule valeur propre λ.

36. Déduire de la question précédente que $E = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^n$.
37. Montrer que si $\lambda > 0$ alors $R(f) \neq \varnothing$.

Partie IV (que si les trois premières parties ont été largement traitées)

Soient $p_1, \dots, p_m$, m endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, m nombres réels distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$: $f^k = \sum_{i=1}^{m} {\lambda_i}^k p_i$.

38. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a : $P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$.
39. En déduire que $\prod_{i=1}^{m} (f - \lambda_i \mathrm{Id}) = 0$, puis que f est diagonalisable.

Pour tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on considère le polynôme :

$$L_\ell(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ i \neq \ell}} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_\ell - \lambda_i)}.$$

40. Montrer que pour tout entier ℓ, tel que $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on a $p_\ell = L_\ell(f)$. En déduire que $\mathrm{Im}(p_\ell) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_\ell \mathrm{Id})$, puis que le spectre de f est :
$$\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}.$$
41. Vérifier que pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leqslant i, j \leqslant m$, on a :
$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j. \end{cases}$$
42. Justifier le fait que la somme $\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$ est directe et égale à E.
43. Montrer que p_j est la projection de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_j \mathrm{Id})$ parallèlement à $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$.
44. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ engendré par $\{p_1, \dots, p_m\}$. Déterminer la dimension de F.
45. Déterminer $R(f) \cap F$ dans le cas où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont des réels positifs ou nuls.
46. Dans cette question, on suppose de plus que $m = n$.
    (a) Préciser alors la dimension des sous-espaces propres de f.
    (b) Montrer que si $h \in R(f)$, tout vecteur propre de f est également vecteur propre de h.
    (c) En déduire que $R(f) \subset F$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que $R(f)$ soit non vide.
47. Montrer que si $m < n$ et si tous les λ_i sont positifs ou nuls, alors $R(f) \not\subset F$.