

1 Nombres complexes

Question 1. Racines de l'unité

1. Cours
2. $(z - 1)S = nz^n$

Question 2. Calcul de somme

$n(z^n + 1)$ par binôme et interversion de sommes

2 Suites numériques

Question 3. Étude d'une suite récurrente On commence par noter que la suite est bien définie (chaque terme de la suite existe bien).

1. variations de f
2. récurrence
3. TVI et stricte monotonie appliqué à $x \mapsto f(x) - x$
4. IAF
5. récurrence
6. théorème d'encadrement

Question 4. Variations sur un résultat de Césaro *

1. non a priori, trouver un contre-exemple avec (u_n) bornée et divergente.
2. Césaro (HP) donne $((u_n) \text{ CV} \Rightarrow (v_n) \text{ CV})$ et
Si (u_n) diverge alors c'est en tendant vers $+\infty$, Césaro version infini permet alors de conclure la réciproque avec $v_n \rightarrow +\infty$.

Question 5. Définition de la limite d'une suite

1. définition de la cv vers 0 de la valeur absolue avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$
2. récurrence, encadrement

Question 6. Étude d'une suite implicite

1. unique solution sur $\mathbb{R}_-$
variations, TVI + stricte croissante
2. $f_n(x_{n+1}) = -x_{n+1} - 1$ or $f_{n+1}(-1) < 0$ donc $x_{n+1} > -1$ donc $f_n(x_{n+1}) = -x_{n+1} - 1 < 0 = f_n(x_n)$
donc $x_{n+1} < x_n$ par croissance de f_n sur $\mathbb{R}_-$ (stricte inutile)
3. $f_n(-1) < 0 = f_n(x_n)$ donc (x_n) décroissante et **minorée par -1** et de $f_n(x_n) = 0$ on tire $x_n = \frac{e^{x_n}}{n} - 1 \rightarrow -1$
4. $x_n + 1 = \frac{e^{x_n}}{n} \sim \frac{e^{-1}}{n}$.

Question 7. Suites adjacentes

- (a) TAF pour $\ln$ sur $[k, k+1]$
(b) par sommation
(c) $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ car $\ln(n+1) - \ln(n) = o(\ln n)$ équivalent $\ln(n)$ par encadrement
- (a) avec $1.a$
(b) $u_n \rightarrow \gamma$ donc $u_n = \gamma + o(1)$

3 Continuité

Question 8. Étude de continuité

Il s'agit du même principe dans les trois cas, la fonction est continue sauf éventuellement en un point a par opérations usuelles sur les fonctions continues. Il reste à vérifier si f est continue en a ie si on a bien $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

- par croissances comparées $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \neq f(0)$ donc f n'est pas continue en 0 mais elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit de fonctions continues.
- continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations usuelles et en 0 en reconnaissant une somme usuelle (géométrique...) donc continue sur $\mathbb{R}$.
- continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations usuelles mais pas en 0 par limite à droite et à gauche différentes.

Question 9. Théorème des valeurs intermédiaires

- Cours
- Par la définition des limites on montre qu'il existe a tel que $f(a) < -\frac{1}{2}$ et b tel que $f(b) \geq \frac{1}{2}$.
- Utiliser TVI sur $g : x \mapsto f(x) - x$.

4 Dérivabilité

Question 10. Lemme de Rolle

- Cours
- Si f non constante il existe $b > a$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Quitte à raisonner sur $-f$ on suppose $f(b) > f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ donc il existe un réel $c > b$ tel que $f(c) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$.
 f est continue sur $[a, c]$ donc y admet un maximum qui n'est pas atteint en a ni c donc sur $]a, c[$ donc f' s'annule pour ce maximum.

Question 11. Étude de la dérivabilité d'une fonction

$x \in D_f \Leftrightarrow 1 - x^4 \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in I = [-a, a]$ avec $a = 2^{\frac{1}{4}}$.

f est dérivable sur $I \setminus \{-a, a, 0\}$ par opérations usuelles sur les fonctions dérivables et en a , $-a$ et 0 on utilise le théorème de la limite de la dérivée : limite finie pour la dérivée en 0 donc dérivable en 0, par contre limites infinies en $\pm a$ donc pas dérivable en $\pm a$.

5 Polynômes

Question 12. Formule de Taylor

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

Si $n < 3$ le reste est X^n sinon, en posant $P = X^n$, on a :

$$\begin{aligned} P &= \underbrace{\sum_{k=0}^2 \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X-a)^k}_{\deg < 3} + \sum_{k=3}^{\deg P} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X-a)^k \\ &= \underbrace{(1 + n(X-1) + \frac{n(n-1)}{2}(X-1)^2 + (X-1)^3)}_{\text{reste}} \sum_{k=0}^{\deg P-3} \frac{P^{(k+3)}(a)}{(k+3)!} (X-a)^{k+3} \end{aligned}$$

On peut aussi l'avoir, plus simplement, par le binôme de Newton avec $X^n = ((X-1) + 1)^n$.

Question 13. Racines

Il faut en fait $n \geq 2$ sinon c'est le polynôme nul dont on ne définit pas la multiplicité des racines (infinie).

Soit donc $n \geq 2$.

Il s'agit de déterminer combien de dérivées successives de P s'annule en 1 (caractérisation de la multiplicité des racines par les dérivées successives).

En considérant que $0 * X^{-1}$ est le polynôme nul on obtient $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et en étant efficace (mettre $n(n-1)$ en facteur) que $P^{(3)}(1) = n(n-1)(2n+2) \neq 0$ donc 2 est racine de multiplicité 3 pour P lorsque $n \geq 3$ et de multiplicité 2 si $n = 2$ (multiplicité inférieure ou égale au degré).

6 Analyse asymptotique

Question 14. Étude de la convergence de suites réelles

Quand $u_n \rightarrow 1$ on cherchera souvent à mettre $\ln(u_n)$ sous la forme $\ln(1 + (u_n - 1)) \sim u_n - 1$ soit par $+1$ -1 soit directement cf 1.

1. $u_n = \frac{n}{2} \ln \left(\frac{n-1+2}{n-1} \right) = \frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{n-1} \right) \sim \frac{n}{2} \times \frac{2}{n-1} \sim \frac{n}{n} = 1$ donc $u_n \rightarrow 1$.
2. $\ln(u_n) \sim n \frac{1}{n}$ donc $u_n \rightarrow e$.
3. $\ln(\cos \frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{2n^2}$ est négligeable devant $\ln(1 - \frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{n}$ donc $\ln(u_n) \sim n \ln(1 - \frac{1}{n}) \sim -1$ donc $u_n \rightarrow \frac{1}{e}$.
4. $\ln(u_n) \rightarrow 0$ donc $u_n = \exp(\ln(u_n)) \rightarrow 1$
5. $u_n \geq 2^n$ donc $u_n \rightarrow +\infty$
6. $\ln(u_n) \sim n \times \frac{x}{n}$ donc $u_n \rightarrow e^x$

Question 15. Calcul de limites par analyse asymptotique

1. équivalent du quotient donne $f(x) \rightarrow 1$
2. $f(x) \rightarrow e^a$.
3. $f(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ par $\ln(x) \sim (x-1)$ en 1.
4. $f(x) \rightarrow \sqrt{e}$ par $\ln(\operatorname{ch} x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et $\operatorname{Arcsin}(x) \underset{0}{\sim} x$.

7 Espaces vectoriels

Question 16. Vrai ou Faux

- a) (1) faux
(2) vrai
(3) vrai
(4) faux
(5) faux
(6) vrai
(7) vrai
- b) (1) faux (=7)
(2) faux (ssi ils sont en somme directe)
(3) vrai
(4) faux
(5) vrai
(6) vrai
(7) faux
Je rajoute «si $n = 4$ alors $G = E$ » : vrai ...

Question 17. Liberté

sens direct ok, car sous-famille également libre et aucun vecteur n'est Cl des autres.

réciroque par contraposée : $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$.

On suppose $(X_1, \dots, X_{n+1})$ liée ($\overline{A}$). Soit une CL nulle $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i$ à coefficients non tous nuls.

- Si $(X_1, \dots, X_n)$ liée alors $\overline{B}$ est vraie.
- Supposons $(X_1, \dots, X_n)$ libre. Si $\lambda_{n+1} = 0$ alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i = 0$ et à coefficients non tous nuls ce qui est absurde donc $\lambda_{n+1} \neq 0$ donc on peut exprimer X_{n+1} comme CL de $(X_1, \dots, X_n)$ donc $\overline{B}$ est vraie.

Question 18. Réunion et intersection de deux sous-espaces vectoriels

1. réciroque immédiate, sens direct par contraposée en supposant ni F dans G ni G dans F . Soit donc $f \in F$ tq $f \notin G$ et $g \in G$ tq $g \notin F$.
Alors $x = f + g$ n'appartient ni à F (sinon $g = x - f \in F$) ni à G (sinon $f = x - g \in G$) donc $f + g \notin F \cup G$ qui n'est donc pas un sous-espace vectoriel.
2. Le sens réciroque évident. Supposons $F \cap G = F + H$ or $F \cap G \subset F \subset F + G = F \cap G$ donc $F = F \cap G$ de même (symétrie en F et G) $G = F \cap G$ donc $F = G$.

Question 19. Sous-espace engendré par une partie *

1. Toute CL finie de A est une CL finie de B .
2. $F \subset \text{Vect}(F)$ et toute CL finie de vecteurs de F est dans F car stable par CL.
3. D'après 2., il suffit de prouver que $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E , même preuve que pour le vect d'une famille finie.

Question 20. Base des polynômes de Lagrange

1. Prendre une CL nulle et évaluer en chacun des a_i .

- La différence des deux polynômes est de degré au plus n et admet $a_0, \dots, a_n$ pour racines.
On en déduit que la famille des L_i (dans $\mathbb{K}_n[X]$) est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. On savait en fait directement que c'était une base par le cardinal et la liberté.

Question 21. Sous-espaces supplémentaires

- F est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et la droite G n'est pas incluse dans ce plan donc ils sont supplémentaires.
- idem

Question 22. Supplémentaire et somme directe

$\dim E_1 + \dim E'_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2) = \dim(E_1 + E_2) = \dim E$ IL reste donc à prouver qu'ils sont en somme directe :

Soit $x \in E_1 \cap E'_2 \subset E_1 \cap E_2$ alors $x \in E'_2 \cap (E_1 \cap E_2) = \{0\}$ cqfd.

8 Espaces vectoriels de dimension finie

Question 23. Théorème du rang

On considère un supplémentaire H du noyau de $\text{Ker } u$ dans E puis l'application $\varphi : H \longrightarrow \text{Im } u$,

$$x \longmapsto u(x)$$

on montre qu'elle est bijective (bon exercice) puis $\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim H = \dim \text{Ker } u + \text{rg } u$.

Question 24. Projecteurs

- théorème du rang et un élément x de l'intersection vérifie $x = p(y)$ et $p(x) = 0$ donc $p^2(y) = 0$ or $x = p(y) = p^2(y)$ donc $x = 0$.
- l'inclusion réciproque est claire, pour celle directe : soit $x \in \text{Im } p$ alors x s'écrit $p(y)$ et donc $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$ cqfd.
- Soit $P_i n \mathbb{K}[X]$ $\deg f(P) < 2$ donc sa division euclidienne par $X^2 = 1$ est : $f(P) = 0.(X^2 + 1) + f(P)$ donc $f(f(P)) = f(P)$ donc $f^2 = f$.
 - $\text{Ker } f = \mathbb{K}[X](X^2 + 1)$ ensemble des multiples de $X^2 + 1$.
 - $\text{Im } f \subset \mathbb{K}_1[X]$ et réciproquement tout polynôme P de $\mathbb{K}_1[X]$ vérifie $P = f(P) \in \text{Im } f$ donc $\text{Im } f = \mathbb{K}_1[X]$.
 - $\Rightarrow$
 - $f \circ g \circ f = f^2$ or $f \circ g \circ f = f \circ g = f$ de même g est un projecteur par symétrie des rôles de f et g .
 - Soit $x \in \text{Ker } f$ alors $0 = g \circ f(x) = g(x)$ donc $x \in \text{Ker } g$ donc $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$ et par symétrie $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f$.
 - $\Leftarrow \forall x \in E, x - f(x) \in \text{Ker } f = \text{Ker } g$ donc $g(x - f(x)) = 0$ donc $g - g \circ f = 0$. Par symétrie on a aussi $f - f \circ g = 0$.

9 Applications linéaires

Question 25. Inégalité triangulaire pour le rang

- $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v$ donc $\dim(\text{Im}(u + v)) \leq \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \leq \dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Im } v)$
- (i) appliqué à $u - v$ et v puis symétrie en u, v

(iii) (DUR cf Ex 29 corrigé différemment)

$$\text{il y a égalité dans (i) ssi } \begin{cases} \dim(\text{Im}(u+v)) = \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) & (1) \\ \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) = \dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Im } v) & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ On suppose qu'il y a égalité dans (i) donc d'après (2) et Grassmann, on a $\text{Im } u \cap \text{Im } v = \{0\}$.

Il reste à prouver que $\text{Ker } u + \text{Ker } v = E$. D'après (1) (l'un inclus dans l'autre) $\text{Im}(u+v) = \text{Im } u + \text{Im } v$ donc en particulier $\text{Im } u \in \text{Im}(u+v)$.

Soit $x \in E$ alors il existe $y \in E$ tq $u(x) = u(y) + v(y)$ donc $u(x-y) = v(y) \in \text{Im } u \cap \text{Im } v = \{0\}$ donc $y \in \text{Ker } v$ et $x-y \in \text{Ker } u$ donc $x = (x-y) + y \in \text{Ker } u + \text{Ker } v$ donc $E \subset \text{Ker } u + \text{Ker } v$, l'autre inclusion étant vraie on a donc égalité.

$\Leftarrow$ On suppose $\text{Im } u \cap \text{Im } v = \{0\}$ et $\text{Ker } u + \text{Ker } v = E$ le premier point assure (1) par Grassmann.

Il reste à prouver (2) ie $\text{Im}(u+v) = \text{Im } u + \text{Im } v$.

Il suffit de prouver $\text{Im } u + \text{Im } v \subset \text{Im}(u+v)$ car l'autre inclusion est toujours vraie. Cela revient à prouver $\text{Im } u \in \text{Im}(u+v)$ et $\text{Im } v \in \text{Im}(u+v)$

Soit $x \in \text{Im } u$ donc il existe $y \in E$ tq $x = u(y)$ on peut écrire $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \text{Ker } u$ et $y_2 \in \text{Ker } v$ car on a supposé $E = \text{Ker } u + \text{Ker } v$.

On a alors $x = u(y_1 + y_2) = u(y_2) = (u+v)(y_2) \in \text{Im}(u+v)$.

On montre de la même manière que $\text{Im } v \in \text{Im}(u+v)$ cqfd.

Question 26. Injectivité, bijectivité d'un endomorphisme

1. RAS

2. $\Rightarrow$ (par contraposée) On suppose g non injective donc $\text{Ker } g \neq \{0\}$ et on considère F un supplémentaire de $\text{Ker } g$ dans E et p le projecteur sur $\text{Ker } g$ parallèlement à F alors p n'est pas la fonction nulle car $\text{Im } p = \text{Ker } g \neq \{0\}$ et $\varphi(p) = g \circ p = 0$ donc φ n'est pas injective cqfd.

$\Leftarrow$ On suppose g injective. Soit $f \in \text{Ker } \varphi$ alors $g \circ f = 0$ donc $\text{Im } f \subset \text{Ker } g = \{0\}$ donc $f = 0$ donc $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ donc φ est injective cqfd.

Montrons que φ est surjective ssi g est surjective ce qui prouvera aussi l'équivalence pour la bijectivité.

$\Rightarrow$ (par contraposée) On suppose g non surjective donc $\text{Im } g \neq E$ donc $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Im}(\varphi(f)) = \text{Im } g \circ f \subset \text{Im } g \neq E$ ainsi l'application Id_E (d'image E) n'est pas dans $\text{Im } \varphi$ donc φ n'est pas surjective. cqfd

$\Leftarrow$ On suppose g surjective et on considère H supplémentaire de $\text{Ker } g$.

On sait qu'il existe une bijection entre h et $\text{Im } g = E$, on note u sa bijection réciproque.

Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ (on veut montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $h = g \circ f = \varphi(f)$).

On définit $f : E \longrightarrow E$ qui est clairement un endomorphisme de E (attention $f \neq u^{-1} \circ h$

$$x \longmapsto u^{-1} \circ h(x)$$

car pas le même espace d'arrivée.

$\varphi(f) = g \circ f = g \circ u^{-1} \circ h = u \circ u^{-1} \circ h = h$ donc φ est surjective.

10 Matrices

Question 27. Calcul de rang

★ $A = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & 1 \\ 2 & 0 & 3-a \end{pmatrix}$ on veut échelonner en lignes par la droite (plutôt que par la gauche habituellement) en faisant disparaître le 1 pour cela il faut faire une disjonction de cas :

- On suppose $a = 3$ alors $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 ($C_2 = -C_3$)
- On suppose $a \neq 3$.

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & 1 \\ 2 & 0 & 3-a \end{pmatrix} = \text{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 5-a & (2-a)(a-3) & 0 \\ 2 & 0 & 3-a \end{pmatrix}}_B \quad L_2 \leftarrow (a-3)L_2 + L_3$$

- Si $a = 1$ alors $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2

- Si $a = 2$ alors $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2

- Si $a \notin \{1, 2, 3\}$ alors le rang vaut 3 (B triangulaire à coefficients diagonaux non nuls).

★ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$

- Si $a = b = c$ le rang vaut 1
- Si deux seulement sur les trois sont égaux alors il y a deux colonnes égales et deux colonnes non colinéaires donc le rang vaut 2.
- On suppose que a, b et c sont distincts 2 à 2.

$$\begin{aligned} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix} \\ (b-a \neq 0, c-a \neq 0) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 / (b-a) \\ C_3 \leftarrow C_3 / (c-a) \end{matrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & c-b \end{pmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2 = 3 \quad \text{car } c-b \neq 0 \end{aligned}$$

On peut joliment résumer en $\text{rg } B = \text{card}\{a, b, c\}$.

$$\star \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$

Même disjonction de cas :

- Si $a = b = c$ le rang vaut 1 (3 colonnes égales et non nulles)
- Si deux seulement sur les trois sont égaux alors il y a deux colonnes égales et deux colonnes non colinéaires donc le rang vaut 2.
- On suppose que a, b et c sont distincts 2 à 2.

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array} \\ (a-b \neq 0, a-c \neq 0) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 / (a-b) \\ C_3 \leftarrow C_3 / (a-c) \end{array} \\ &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \end{pmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2 = 3 \quad \text{car } b-c \neq 0 \end{aligned}$$

On peut de nouveau résumer en $\operatorname{rg} C = \operatorname{card}\{a, b, c\}$.

Question 28. Inversibilité

1. $X^T A X$ est une matrice 1x1 donc symétrique (que l'on confond habituellement avec son unique coefficient)
donc $(X^T A X)^T = X^T A X$ or $(X^T A X)^T = X^T A^T X = X^T (-A) X = -X^T A X$ donc $-X^T A X = X^T A X$ donc $X^T A X = 0$.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(A + I)X = 0$ donc $X^T(AX + X) = 0$ donc $X^T X = 0$ or $X^T X$

est le réel (avec la confusion évoquée) $\sum_{i=1}^n x_i^2$ donc (réels positifs) $x_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$(A + I)X = 0 \Rightarrow X = 0$ donc $A + I$ est inversible (caractérisation moins utilisée).

11 Probabilités

Question 29. Couple de variables aléatoires

1. $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 (= X(\Omega) \times Y(\Omega))$.

$$P(X = i, Y = j) = P(Y = j \mid X = i)P(X = i) = \begin{cases} \frac{1}{i} \times \frac{1}{n} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}.$$

Remarque : il peut être difficile (pas ici) et périlleux (ici) pour la suite de chercher à déterminer exactement $(X, Y)(\Omega)$, on détermine plutôt $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ qui contient le précédent.

2. $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Formule des lois marginales (ou FPT avec SCE associé à X) :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(Y = j) = \sum_{i=1}^n P(X = i, Y = j) \underset{\text{danger}}{=} 0 + \sum_{i=j}^n P(X = i, Y = j) = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^n \frac{1}{i}$$

3. Sachant $Y = j$ les seules valeurs possibles pour X sont entre j et n .

$$\forall i \in \llbracket j, n \rrbracket, P(X = i | Y = j) = \frac{P(X = i, Y = j)}{P(Y = j)} = \frac{1}{\sum_{k=i}^n \frac{1}{k}}$$

Ainsi la loi de X sachant $Y = j$ est la loi uniforme sur $\llbracket j, n \rrbracket$ ($\mathcal{U}(\llbracket j, n \rrbracket)$) pas de notation dédiée pour loi conditionnelle de X).

Question 30. Loi d'un minimum On notera M plutôt que m .

(a) $(M \geq k) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \geq k)$ (bien comprendre pourquoi ...)

d'où par indépendance et lois uniformes $P(M \geq k) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^n$.

(b) $M(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(M = k) = P(M \geq k) - P(M > k) = P(M \geq k) - P(M \geq k+1)$.

Pour $k < n$ (pour avoir $k+1 \leq n$) on a donc

$$P(M = k) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n-k}{n}\right)^n$$

et la formule est valable pour $k = n$ ($1=1-0$).

(c) $\underbrace{(\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket : X_i = 1)}_A = (M = 1)$ (l'un au moins vaut 1 équivaut au minimum qui vaut vaut 1)

donc $P(A) = \left(\frac{n-1+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

il s'agit donc de prouver que $\frac{1}{e} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ (qui tend vers $\frac{1}{e} \dots$).

or $\ln\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq n \times \left(-\frac{1}{n}\right) = -1$ (cours : inégalité de convexité)

on conclut par passage à l'exponentielle croissante (sur $\mathbb{R}$).

12 Intégration

Question 31. Intégrales de Wallis (*grand classique à bien maîtriser*)

1. $I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = 1$

changement de variable qui change sin en cos : $u = \frac{\pi}{2} - t$

2. $I_{n+1} - I_n$ sous forme d'intégrale puis positivité de l'intégrale donne $I_{n+1} - I_n \leq 0$, donc décroissante et minorée par 0 (positivité bis) donc CV par TLM.

5/2 : on peut montrer (à faire) que la limite est 0 par CVD.

3. en décomposant $\sin^{n+2} = \sin \times \sin^{n+1}$ et en dérivant $\sin^{n+1}$ on a - avec $\cos^2 = 1 - \sin^2$ - une relation entre I_{n+2} et I_n qui permet de conclure.

4. Par récurrence avec question précédente mais directement on obtient que la suite est constante en multipliant la relation précédente par $(n+2)I_{n+1}$.

5. Il s'agit en fait de montrer que $I_{n+1} \sim I_n$ (souvent demandé mais à savoir).

Par décroissance $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ et par la question 3, $I_{n+2} \sim I_n$ donc par théorème d'encadrement (version équivalent) on a $I_{n+1} \sim I_n$.

La question 4 donne alors $nI_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$ donc $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Question 32. Taylor avec reste intégral

(HP PCSI, au programme en PSI)

1. IPP dans reste intégral ... (insister)
2. On applique avec cosinus qui est C^3 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ avec 0 et x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ (les termes de la somme sont ceux de la partie régulière du $DL_2(0)$ de $\cos$)

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \cos^{(3)}(t) dt = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin(t) dt \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

Par positivité avec $0 \leq x$ (bornes dans le « bon sens »). ON conclut pour l'autre inégalité en l'appliquant de la même façon mais à l'ordre 4 (avec $\cos C^5$).

13 Espaces préhilbertiens réels

Question 33. Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(application bien définie (il pourra y avoir plus tard des pb de séries ou d'intégrales généralisées)

- $\text{tr}((A^\top B) = \text{tr}((A^\top)^\top) = \text{tr}(B^\top A)$ donc l'application est *symétrique*.
- linéaire à droite (à faire) donc *bilinéaire* car symétrique.
- $[A^\top A]_{i,i} = \sum_{k=1}^n \underbrace{a_{k,i} a_{k,i}}_{\geq 0} \geq 0$ donc $\text{tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n [A^\top A]_{i,i} \geq 0$ (*positivité*)
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\text{tr}(A^\top A) = 0$ donc $\sum_{1 \leq i, k \leq n} (a_{k,i})^2 = 0$ donc (somme nulle de termes positifs donc les termes sont nuls) les $a_{i,k}$ sont tous nuls donc $A = 0$ donc (avec positivité) l'application est *définie positive*.

Question 34. Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. $|(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\|$
ou $(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y)$ Cours pour la preuve par positivité d'un trinôme du second degré donc discriminant négatif ...

2. En considérant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}([0,1])$: $(f|g) = \int_0^1 fg$ alors d'après CS avec g la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1]), \quad \left(\int_0^1 f \right)^2 = \left(\int_0^1 fg \right)^2 = (f|g)^2 \leq (f|f) \times \underbrace{(g|g)}_{=1} = \int_0^1 f^2$$

3. Égalité dans CS ssi les vecteurs sont colinéaires (ie forment une famille liée). Donc égalité dans 2. si et seulement si f et g sont liées si et seulement si f est constante sur $[0,1]$.

14 Séries numériques

Question 35. Série géométrique

1.
 - Si $|q| \geq 1$ c'est une divergence grossière
 - Si $|q| < 1$, $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1 - q}$.

2. $|r^n \cos(n\theta)| = |r^n \cos(n\theta)| \leq r^n$ donc ACV par comparaison puis calcul (convergence possible aussi) par partie réelle et partie imaginaire d'une série géométrique.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1 - r \cos(\theta)}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sin(n\theta) = \frac{r \sin(\theta)}{1 + r^2 - 2r \cos \theta}$$

3.

Question 36. Comparaison des séries à termes positifs

1. Cours, l'idée est qu'apcr $\frac{1}{2}u_n \leq v_n \leq 2u_n$ (par exemple).
2. $\ln(un) \rightarrow -\infty$ donc $u_n = e^{\ln(u_n)} \rightarrow 0$.
3. d'après la question précédente $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (=o $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ même) donc $\sum u_n$ est ACV donc CV.