Programme de colle n° 5 14 oct – 18 oct

Réduction

Éléments propres

- Éléments propres d'un endomorphisme, caractérisation des valeurs propres, cas de la dimension finie.
- Éléments propres d'une matrice carrée, caractérisation des valeurs propres, spectre d'une matrice triangulaire
- Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et de ses matrices, correspondances vectorielle/matricielle.
- Stabilité des sous espaces propres $E_\lambda(u)$ par v si v commute avec u.
- Liberté d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes, les sous-espaces propres sont en somme directe.
- Polynômes d'endomorphisme et de matrices carrées :
  Si $u(x) = \lambda x$ alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
  Si P est un polynôme annulateur de u alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathrm{Rac}(P)$.

Polynôme caractéristique

- Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique .
  $\chi_A = X^n - (\mathrm{tr}\,A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.
  Cas des matrices triangulaires ou triangulaires par blocs.
- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Rac}_{\mathbb{K}}(\chi_A)$, spectre complexe d'une matrice réelle.
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme (E de dim finie), lien avec spectre. Si F stable par u alors χ_{u_F} divise χ_u.
- **multiplicité d'une valeur propre** , $1 \leqslant m_\lambda \leqslant \dim E_\lambda(u)$, cas de la valeur propre simple.
  (On a utilisé la convention $m_\mu = 0 \Leftrightarrow \mu \notin \mathrm{Sp}(u)$).
  Cas de la matrice réelle vue comme matrice complexe :
  $m_\lambda = m_{\overline{\lambda}}$, $\dim E_\lambda(u) = \dim E_{\overline{\lambda}}(u)$.
  Si χ_u scindé (cf u trigonalisable) avec $\chi_u = \prod_{i=1}^{n}(X-\mu_i) = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$ alors
  $$\mathrm{tr}\,u = \sum_{i=1}^{n}\mu_i = \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i}\lambda_i, \qquad \det u = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{m_{\lambda_i}}$$

Diagonalisation

(E $\mathbb{K}$-ev de dim finie n)

- Diagonalisabilité des endomorphimes et des matrices carrées, lien entre les deux.
  Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.

Conditions Nécessaires et Suffisantes de diagonalisabilité :
Les propositions suivantes sont équivalentes

- $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable .
- E est somme (directe) des sous-espaces propres de u.
- $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = n$
- χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall\lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.
- u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples .
- $\displaystyle\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$ est un polynôme annulateur de u.

Traductions matricielles en remplaçant u, E par $A, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Condition **Suffisante** de diagonalisabilité :
Si u ($A \in \mathcal{M}_n\mathbb{K}$) admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ alors u (A) est diagonalisable. Cela équivaut χ_u (χ_A) scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.