

**Programme de colle n° 7      11 nov – 15 nov**

## RÉDUCTION

### Éléments propres

- Éléments propres d'un endomorphisme, caractérisation des valeurs propres, cas de la dimension finie.
- Éléments propres d'une matrice carrée, caractérisation des valeurs propres, spectre d'une matrice triangulaire
- Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et de ses matrices, correspondances vectorielle/matricielle.
- Stabilité des sous espaces propres  $E_\lambda(u)$  par  $v$  si  $v$  commute avec  $u$ .
- Liberté d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes, les sous-espaces propres sont en somme directe.
- Polynômes d'endomorphisme et de matrices carrées :  
Si  $u(x) = \lambda x$  alors  $P(u)(x) = P(\lambda)x$ .  
Si  $P$  est un polynôme annulateur de  $u$  alors  $\text{Sp}(u) \subset \text{Rac}(P)$ .

### Polynôme caractéristique

- Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique .  
 $\chi_A = X^n - (\text{tr } A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$ .  
Cas des matrices triangulaires ou triangulaires par blocs.
- $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \text{Rac}_{\mathbb{K}}(\chi_A)$ , spectre complexe d'une matrice réelle.
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme ( $E$  de dim finie), lien avec spectre. Si  $F$  stable par  $u$  alors  $\chi_{u_F}$  divise  $\chi_u$ .
- **multiplicité d'une valeur propre** ,  $1 \leq m_\lambda \leq \dim E_\lambda(u)$ , cas de la valeur propre simple.  
(On a utilisé la convention  $m_\mu = 0 \Leftrightarrow \mu \notin \text{Sp}(u)$ ).  
Cas de la matrice réelle vue comme matrice complexe :  
 $m_\lambda = m_{\bar{\lambda}}$ ,  $\dim E_\lambda(u) = \dim E_{\bar{\lambda}}(u)$ .  
Si  $\chi_u$  scindé (cf  $u$  trigonalisable) avec  $\chi_u = \prod_{i=1}^n (X - \mu_i) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$   
alors

$$\text{tr } u = \sum_{i=1}^n \mu_i = \sum_{i=1}^p m_{\lambda_i} \lambda_i, \quad \det u = \prod_{i=1}^p \lambda_i^{m_{\lambda_i}}$$

## Diagonalisation

( $E$   $\mathbb{K}$ -ev de dim finie  $n$ )

- Diagonalisabilité des endomorphismes et des matrices carrées, lien entre les deux.

*Dans la pratique des cas numériques, on se limite à  $n = 2$  ou  $n = 3$ .*

**Conditions Nécessaires et Suffisantes de diagonalisabilité :**  
**Les propositions suivantes sont équivalentes**

- $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable .
- $E$  est somme (directe) des sous-espaces propres de  $u$ .
- $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = n$
- $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et  $\forall \lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$ .
- $u$  admet un polynôme annulateur scindé à racines simples .
- $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$  est un polynôme annulateur de  $u$ .

**Traductions matricielles** en remplaçant  $u, E$  par  $A, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

Condition **Suffisante** de diagonalisabilité :

Si  $u$  ( $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ) admet  $n$  valeurs propres distinctes dans  $\mathbb{K}$  alors  $u$  ( $A$ ) est diagonalisable. Cela équivaut  $\chi_u$  ( $\chi_A$ ) scindé à racines simples sur  $\mathbb{K}$ .

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.

## Trigonalisation

- Trigonalisation des endomorphismes et des matrices carrées.  
Lien entre les deux.
- (Retour) Si trigonalisable, expression de la trace et du déterminant à l'aide des valeurs propres comptées avec multiplicité.
- Théorème de Cayley-Hamilton
- $u$  ( $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$ .
- Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable, cas d'une matrice réelle vue comme matrice complexe.

*Programme officiel :*

*La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.*

## RÉVISIONS DÉNOMBREMENT

### ENSEMBLES DÉNOMBRABLES, FAMILLES SOMMABLES

« Pour bien planter le décor »

Programme officiel : Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

### ESPACES PROBABILISÉS (PAS DE VA)

- Univers  $\Omega$  d'une expérience aléatoire, tribu  $\mathcal{A}$  des événements.
- Dualité probabiliste/ensablite des événements et des opérations sur les événements, notamment  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$  et  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ .
- SCE, distributivité, lois de Morgan.
- Probabilité  $P$  sur un espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $\sigma$ -additivité. Espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .
- $P(A \cup B)$ ,  $P(A \setminus B)$ ,  $P(\bar{A})$ , croissance de la probabilité.
- Événement presque sûr, événement négligeable, système quasi-complet d'événements.

- Théorème de la limite monotone : continuité croissante, continuité décroissante.
- Limites de  $P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$  et  $P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$ .
- Sous-additivité :  
$$P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \sum_{k=0}^n P(A_k), \quad P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$
- Caractérisation d'une probabilité sur un univers dénombrable  $\Omega$  par sa distribution de probabilité  $(P(\{\omega\})_{\omega \in \Omega})$  ( $\sim$ HP a priori cas fini au programme) cas fini : probabilité uniforme et modélisation d'une expérience (choix de  $\Omega$  avec issues équiprobables).
- Probabilités conditionnelles.  $P_B$  est une probabilité.
- Convention  $P_B(A)P(B) = 0$  ( $= P(A \cap B)$ ) lorsque  $P(B) = 0$ .
- Formule des probabilités composées (*sans hypothèse particulière avec la convention*).
- Formule des probabilités totales (*idem*) avec un système complet d'événements ou un système quasi-complet d'événements.
- Formule de Bayes.
- Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle de  $n$  événements (vu indépendance mutuelle d'une suite événements (HP)).
- Lemme des coalitions pour les événements.