Programme de colle n° 8 18 nov – 22 nov

Révisions dénombrement

Ensembles dénombrables, familles sommables

« *Pour bien planter le décor* »

Programme officiel : Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

Espaces probabilisés

- Univers Ω d'une expérience aléatoire, tribu $\mathcal{A}$ des événements.
- Dualité probabiliste/ensembliste des événements et des opérations sur les événements, notamment $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.
- SCE, distributivité, lois de Morgan.
- Probabilité P sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, σ-additivité.
  Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- $P(A \cup B)$, $P(A \backslash B)$, $P(\overline{A})$, croissance de la probabilité.
- Événement presque sûr, événement négligeable, système quasi-complet d'événements.
- Théorème de la limite monotone : continuité croissante, continuité décroissante.
- Limites de $P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_n\right)$ et $P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_n\right)$.
- Sous-additivité :
  $P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$, $\qquad P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \in \overline{\mathbb{R}_+}$.
- Caractérisation d'une probabilité sur un univers dénombrable Ω par sa distribution de probabilité $(P(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$
  ($\sim$*HP a priori* cas fini au programme)
  cas fini : probabilité uniforme et modélisation d'une expérience (choix de Ω avec issues équiprobables).
- Probabilités conditionnelles. P_B est une probabilité.
- Convention $P_B(A)P(B) = 0$ $(= P(A \cap B))$ lorsque $P(B) = 0$).
- Formule des probabilités composées (*sans hypothèse particulière avec la convention*).
- Formule des probabilités totales (*idem*) avec un système complet d'événements ou un système quasi-complet d'événements.
- Formule de Bayes.
- Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle de n événements (vu indépendance mutuelle d'une suite événements (HP)).
- Lemme des coalitions pour les événements.

Variables aléatoires discrètes (sans moments sur lois infinies)

Loi d'une VAD

Définition d'une VAD
Loi P_X d'une VAD. Hors lois usuelles, donner la loi d'une VAR discrète X c'est :

1. Préciser $X(\Omega)$ (ou, à défaut, $\mathcal{N}$ au plus dénombrable tel que $X(\Omega) \subset \mathcal{N}$).
2. Donner $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$ (ou tout $x \in \mathcal{N}$).

Calcul de $P(X \in A)$. SCE associé à une VAD.
Si X est une VAD alors $f(X)$ est une VAD.
VAD suivant une même loi, notation $X \sim Y$. $\quad X \sim Y \Rightarrow f(X) \sim f(Y)$.

Lois usuelles discrètes

Lois finies : Rappels sur les sommes et formules usuelles (géométriques, arithmétiques, binôme, Bernoulli, Pascal, du chef, Vandermonde (HP))
Rappels sur les lois constantes (ou variables p.s. constantes), uniformes, Bernoulli, binomiales, avec espérance et variance (variance uniforme HP), schémas théoriques et somme de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.

Lois usuelles discrètes infinies :

- **Lois géométriques** variables géométriques, notation $X \sim \mathcal{G}(p)$ ($p \in]0, 1[$).
  $P(X > n) = (1 - p)^n$ (absence de mémoire vue mais HP).
  Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
- **Lois de Poisson** variables de Poisson, notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$).
  Interprétation en termes d'événements rares (approximation des lois binomiales par des lois de Poisson vue mais HP, convergence en probas HP), stabilité des lois de Poisson vue mais HP.

Couples de VAD

Un couple de VAD (X, Y) est une VAD à valeurs dans $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Notation $P(X = x, Y = y)$.
Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles, «formule des lois marginales».
Extension aux n-uplets de variables aléatoires. .

Indépendance

Indépendance de deux VAD ($P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$),
caractérisation de l'indépendance de deux VAD ($P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$), notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.
Mutuelle indépendance de n VAD qui implique l'indépendance 2 à 2, caractérisation de la mutuelle indépendance.
Suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de VAD indépendantes, suite de VAD i.i.d. (indépendantes identiquement distribuées).
$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$, extension à n VAD mutuellement indépendantes.
Lemme des coalitions avec un nombre quelconque de coalitions.