Programme de colle n° 9 25 nov – 29 nov

Variables aléatoires discrètes (sans moments sur lois infinies)

Loi d'une VAD

Définition d'une VAD
Loi P_X d'une VAD. Hors lois usuelles, donner la loi d'une VAR discrète X c'est :

1. Préciser $X(\Omega)$ (ou, à défaut, $\mathcal{N}$ au plus dénombrable tel que $X(\Omega) \subset \mathcal{N}$).
2. Donner $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$ (ou tout $x \in \mathcal{N}$).

Calcul de $P(X \in A)$. SCE associé à une VAD.
Si X est une VAD alors $f(X)$ est une VAD.
VAD suivant une même loi, notation $X \sim Y$. $X \sim Y \Rightarrow f(X) \sim f(Y)$.

Lois usuelles discrètes

Lois finies : Rappels sur les sommes et formules usuelles (géométriques, arithmétiques, binôme, Bernoulli, Pascal, du chef, Vandermonde (HP))
Rappels sur les lois constantes (ou variables p.s. constantes), uniformes, Bernoulli, binomiales, avec espérance et variance (variance uniforme HP), schémas théoriques et somme de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.

Lois usuelles discrètes infinies :

– **Lois géométriques** variables géométriques, notation $X \sim \mathcal{G}(p)$ ($p \in]0, 1[$).
  $P(X > n) = (1 - p)^n$ (absence de mémoire vue mais HP).
  Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
– **Lois de Poisson** variables de Poisson, notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$).
  Interprétation en termes d'événements rares (approximation des lois binomiales par des lois de Poisson vue mais HP, convergence en probas HP), stabilité des lois de Poisson vue mais HP.

Couples de VAD

Un couple de VAD (X, Y) est une VAD à valeurs dans $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Notation $P(X = x, Y = y)$.
Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles, ≪formule des lois marginales≫.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires. .

Indépendance

Indépendance de deux VAD ($P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$),
caractérisation de l'indépendance de deux VAD ($P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$), notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.
Mutuelle indépendance de n VAD qui implique l'indépendance 2 à 2, caractérisation de la mutuelle indépendance.
Suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de VAD indépendantes, suite de VAD i.i.d. (indépendantes identiquement distribuées).
$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$, extension à n VAD mutuellement indépendantes.
Lemme des coalitions avec un nombre quelconque de coalitions.

Espaces vectoriels normés

NB : Pas de topologie cette semaine

Normes

Hypothèses de *positivité, séparation, homogénéité, inégalité triangulaire*,
norme associée à un produit scalaire (rappels élémentaires), distance associée à une norme.
Normes usuelles $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ (et tout ev de dimension n avec base associée) et $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Programme : L'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ *pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. peut être directement utilisée.*

Boule ouverte, fermée, sphère (voisinage évoqué), boule et sphère unité.
Parties convexes, convexité des boules.
Partie bornée, fonction bornée, $\| \|_\infty$ sur espace de fonctions bornées.

Suites d'éléments dans un espace vectoriel normé

Convergence, divergence, unicité de la limite, opérations sur les limites.
Toute suite convergente est bornée.
Convergence des suites extraites d'une suite convergente.
$u_n \to \ell$ si et seulement si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$.

Comparaison de normes

Domination d'une norme par une autre (terme a priori HP).
Normes équivalentes, transitivité.
Norme de la convergence uniforme sur des espaces vectoriels $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Invariance du caractère borné, de la convergence et de la limite d'une suite convergente pour deux normes équivalentes.
Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.

Équivalence des normes en dimension finie (cas des normes usuelles sur espace vectoriel de dim finie avec base associée).
La convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses suites coordonnées dans une base
et en cas de convergence les coordonnées de la limite sont les limites des coordonnées.