PSI – LMB

Programme de colle n° 10 2 déc – 6 déc

Espaces vectoriels normés

Normes

Hypothèses de *positivité, séparation, homogénéité, inégalité triangulaire*,
norme associée à un produit scalaire (rappels élémentaires), distance associée à une norme.
Normes usuelles $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ (et tout ev de dimension n avec base associée) et $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Programme : L'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ *pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. peut être directement utilisée.*

Boule ouverte, fermée, sphère (voisinage évoqué), boule et sphère unité.
Parties convexes, convexité des boules.
Partie bornée, fonction bornée, $\| \|_\infty$ sur espace de fonctions bornées.

Suites d'éléments dans un espace vectoriel normé

Convergence, divergence, unicité de la limite, opérations sur les limites.
Toute suite convergente est bornée.
Convergence des suites extraites d'une suite convergente.
$u_n \to \ell$ si et seulement si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$.

Comparaison de normes

Domination d'une norme par une autre (terme a priori HP).
Normes équivalentes, transitivité.
Norme de la convergence uniforme sur des espaces vectoriels $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Invariance du caractère borné, de la convergence et de la limite d'une suite convergente pour deux normes équivalentes.
Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.

Équivalence des normes en dimension finie (cas des normes usuelles sur espace vectoriel de dim finie avec base associée).
La convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses suites coordonnées dans une base
et en cas de convergence les coordonnées de la limite sont les limites des coordonnées.

Topologie

Point intérieur à une partie ($\mathring{A}$ HP)
Ouverts, exemples des boules ouvertes, stabilité par réunion quelconque et par intersection finie.
Fermés, **caractérisation séquentielle des fermés** , exemples des boules fermées et des sphères. stabilité par intersection quelconque et par union finie.
Point adhérent à une partie, adhérence, **caractérisation séquentielle de l'adhérence**.
Densité

Programme : *A fermée si et seulement si $\overline{A} = A$ est HP mais doit savoir être prouvé.*

Limites et continuité

NB : Pas de multilinéarité cette semaine

Les fonctions sont toutes définies de $A \subset E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé dans F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé .

Limites

Limite de f en $a \in \overline{A}$, caractérisation séquentielle, unicité de la limite.
Opérations sur les limites, cas particuliers avec fonctions scalaires.
Limites et inégalités pour fonctions réelles, cas particulier avec une variable réelle.
Invariance par changement pour norme équivalente.

Continuité

Continuité en un point $a \in A$, caractérisation séquentielle.
Continuité sur une partie A, opérations sur les fonctions continues, structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
Fonctions lipschtiziennes, continuité des fonctions lipschitziennes.
L'application norme est 1-lipschitzienne.
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.
Cas particuliers (f à valeurs dans $\mathbb{R}$) des ensembles définis par $f(x) > 0$, $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ avec f continue.

Dimension finie

Applications coordonnées d'une application à valeurs F de dim finie de base donnée.
f admet une limite en $a \in \overline{A}$ ou est continue en $a \in A$ si et seulement si ses applications coordonnées également.
Théorème des bornes atteintes.
Applications linéaires : elles sont toutes continues sur E de dimension finie.
Cas particulier des produits matriciels $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ et des applications coordonnées $\sum x_i e_i \mapsto x_k$.

HP : les caractérisations des applications linéaires en dim quelconque
(mais en pratique on étudie quand même toujours le caratère lipschitzien).

Applications polynomiales : définition sur $\mathbb{K}^n$, sur E de dimension finie.
Toute application polynomiale est continue

HP : l'application déterminant est polynomiale sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.