

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES (OU IMPROPRES)

I désigne un intervalle semi-ouvert ou ouvert (au moins une « borne ouverte ») de \mathbb{R} de bornes a et b avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Fonctions continues par morceaux

Fonctions continues par morceaux sur un segment, intégrale de fonction continue par morceaux sur un segment, propriétés.

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle de \mathbb{R} , notation $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, stabilité par combinaison linéaire et par produit.

Intégrales généralisées

- Généralisation de l'intégrale sur $I = [a, b[$ d'une fonction continue par morceaux sur I , convergence, divergence.

Caractère local (en b^-) de la nature de l'intégrale.

Terminologie : convergence ou convergence en b^-

Si f continue sur $[a, b[$, $\int_{[a, b[} f$ est convergente et $\int_{[a, b[} f = \int_{[a, b]} f$, notation $\int_a^b f$. Prolongement par continuité et intégrale faussent impropre.

- Généralisation de l'intégrale sur $I =]a, b]$, transposition des résultats précédents.

- Généralisation de l'intégrale sur $I =]a, b[$,

Terminologie : intégrale convergente ou convergente en a^+ et en b^- .

- Utilisation de primitives :

Si f est continue sur I et F une primitive de f sur I . Alors

$\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si F admet des limites finies en les bornes « ouvertes » de I .

$$\text{Dans ce cas on a } \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = \begin{cases} \lim_{b^-} F - F(a) & \text{si } I = [a, b[\\ F(b) - \lim_{a^+} F & \text{si } I =]a, b] \\ \lim_{b^-} F - \lim_{a^+} F & \text{si } I =]a, b[\end{cases}$$

Propriétés des intégrales généralisées

On s'assure avant tout que les intégrales manipulées sont bien convergentes.

Relation de Chasles, linéarité, positivité, stricte positivité, croissance, cas des fonctions à valeurs complexes.

Cas des fonctions positives

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ et positive alors :

$\int_a^b f$ est convergente si et seulement si $x \int_a^x f(t)dt$ est majorée.

Théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives :

Soit f et g continues par morceaux sur I , telles que $0 \leq f \leq g$ alors : $\int_I g$ converge $\implies \int_I f$ converge.

Techniques de comparaison série-intégrale (HP à savoir reprouver) :

$$- \int_{n_0}^{+\infty} f \text{ converge} \implies \sum_{n \geq n_0} \int_n^{n+1} f \text{ converge}$$

$$- \text{ si } f \text{ est positive alors } \int_{n_0}^{+\infty} f \text{ converge} \iff \sum_{n \geq n_0} \int_n^{n+1} f \text{ converge}$$

$$- \text{ si } f \text{ est positive et décroissante alors } \int_{n_0}^{+\infty} f \text{ converge} \iff \sum_{n \geq n_0} \int_n^{n+1} f \text{ converge} \iff \sum_{n \geq n_0} f(n) \text{ converge}$$

Intégrales absolument convergentes et intégrabilité

Intégrales absolument convergentes, ACV \implies CV, inégalité triangulaire, intégrales semi-convergentes.

Programme officiel : l'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme

Fonctions intégrables sur I , $L^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{K})$. Caractère local de l'intégrabilité (en la/les borne(s) ouverte(s) de I).

Terminologie : f intégrable sur $[a, b[$ ou intégrable en b^- .

Fonctions de références :

Intégrabilité en 0^+ de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ ssi $\alpha < 1$.

Intégrabilité en a^+ de $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ ssi $\alpha < 1$.

Intégrabilité en b^- de $t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ ssi $\alpha < 1$.

Intégrabilité en 0^+ de $t \mapsto \ln t$.

Intégrabilité en $+\infty$ de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ ssi $\alpha > 1$.

Intégrabilité en $+\infty$ de $t \mapsto e^{at}$ ssi $a < 0$.

f est intégrable en a^+ ssi $t \mapsto f(a+t)$ est intégrable en 0^+

f est intégrable en b^- ssi $t \mapsto f(b-t)$ est intégrable en 0^+

Théorème de comparaison :

- Si $f = O_c(g)$, alors : g est intégrable en $c \implies f$ est intégrable en c .

- Si $f \sim_c g$, alors : f est intégrable en $c \iff g$ est intégrable en c .

Cas particulier $f = o_c(g)$

Techniques de calculs d'une intégrale généralisée

Changement de variable : f continue sur $]a, b[$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une **bijection strictement croissante** (décroissante) de classe \mathcal{C}^1 . Alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ ($\int_\beta^\alpha f(\varphi(u))\varphi'(u)du$) sont de même nature et égales en cas de convergence.

Programme officiel : On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.

Cas des fonctions continues paire ou impaire sur $] -a, a[$.

Intégration par parties :

Soit f et $g \in \mathcal{C}^1$ sur I . Si fg admet une limite finie en chaque « borne ouverte » de I alors les intégrales $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature, et, lorsqu'elles convergent, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

(Si une seule borne impropre, éventuellement faire l'IPP sur l'intégrale partielle puis faire un passage à la limite).

Programme officiel : Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.