Programme de colle n^o 16 3 fév – 7 fév

Suites et séries de fonctions intégrables

Programme officiel : Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

– **Théorème de convergence dominée** :
Si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)\mathrm{d}t$$

Cas particulier où $f_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_n$ est une **somme partielle de série de fonctions** intégrables sur I.

Dans ce cas, le résultat de la CVD s'écrit (intégration terme à terme) : $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)dt.$

– **Théorème d'intégration terme à terme** :
Si une série $\sum f_n$ de fonctions intégrables sur I converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur I , et si la série $\displaystyle\sum \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt$$

.

Intégrales à paramètre

Programme officiel : Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t .

– **Théorème de continuité**
Soit f une fonction définie sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de $\mathbb{R}$ telle que :

a) $\forall x \in A,\ t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

b) $\forall t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;

c) **Hypothèse de domination :** Il existe une fonction φ *intégrable sur* I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I\ ,\ \big|f(x,t)\big| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $g\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Le résultat de ce théorème et de celui de dérivation et ses extensions restent vrais si on suppose seulement que l'hypothèse de domination est vérifiée pour $(x,t) \in K \times I$, **pour tout segment** K inclus dans A (ou pour toute famille d'intervalles recouvrant tous ces segments ie recouvrant A.

– **Théorème de convergence dominée à paramètre continu**
Soit f une fonction définie sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et a une borne de A tel que :

a) $\forall x \in A,\ t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

b) $\forall t \in I,\ \lim\limits_{x\to a} f(x,t) = \ell(t)$ finie, où ℓ est une fonction continue par morceaux sur I ;

c) **Hypothèse de domination :** Il existe une fonction φ *intégrable sur* I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I\ ,\ \big|f(x,t)\big| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I,
la fonction ℓ est intégrable sur I et $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$

– **Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre**
Soit f une fonction définie sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de $\mathbb{R}$ tel que :

a) $\forall\, x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est *intégrable* sur I.

b) $\forall\, t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.

c) $\forall\, x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I .

d) **Hypothèse de domination** : Il existe une fonction φ *intégrable sur* I telle que :

$$\forall\,(x,t) \in A \times I \ , \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, la fonction $g \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, et :

$$\forall\, x \in A \ , \ g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Extension à la classe $\mathcal{C}^n$ sous domination de $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ et intégrabilité des $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
Corollaire de la classe $\mathcal{C}^\infty$ avec domination de $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Espérance et variance de variables aléatoires discrètes

Espérance

Espérance d'une VAD à valeurs dans $[0,+\infty]$.

Espérance d'une VA à valeurs dans $[\![0,+\infty[\![$, $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.

Une VA discrète à valeurs réelles ou complexes est d'espérance finie si $(xP(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, dans ce cas $E(X) = \sum_{x\in X\Omega} xP(X=x)$.
Espérances finies des variables géométriques et de Poisson.
Formule de transfert, cas d'un couple (ou n-uplet).
Inégalité triangulaire, théorème de comparaison, cas particulier d'une VAD bornée.
Linéarité de l'espérance, variable centrée, positivité, croissance.
Si X est positive d'espérance nulle alors $X = 0$ presque sûrement.
Produit de variables aléatoires indépendantes et d'espérance finie.

Variance

Les VAD sont maintenant réelles.
(HP) Définitions des moments d'une VA, lien entre les existences de moments.
Si X^2 est d'espérance finie (ie X admet un moment d'ordre 2) alors X est d'espérance fine (ie X admet un moment d'ordre 1).
Inégalité de Cauchy-Schwarz : Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors XY admet une espérance finie et $E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$, cas d'égalité.
Stabilité par CL des VA admettant un moment d'ordre 2.
Définition de la variance, variance finie. Positivité, cas nul.
$V(aX+b)$.
Formule (théorème) de Koenig-Huygens : X admet une variance finie ssi X^2 admet une espérance finie et dans ce cas : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
Écart-type, variable réduite, variable centrée réduite associée à une VA X.
Variance finie des variables géométriques et de Poisson.

Covariance

Définition de $\mathrm{Cov}(X,Y)$ lorsque X et Y sont de variance finie. Variables décorrélées.
Formule de Koenig-Huygens : $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
Bilinéarité, cas de deux VA indépendantes.
Variance d'une somme finie, cas de variables 2 à 2 indépendantes (décorrélées suffisant).

TSVP

Fonctions génératrices

X est ici à valeurs dans $\mathbb{N}$.
$G_X(t) = E(t^X)$, définie ssi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} P(X=n)t^n$ est ACV.
Série entière $\sum P(X=n)t^n$ (série génératrice de X) : rayon de convergence $\geqslant 1$, convergence normale sur $[-1,1]$, somme G_X définie et continue sur $[-1,1]$.

Programme : Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

La fonction génératrice caractérise la loi.
X est d'espérance finie ssi G_X est dérivable en 1 et dans ce cas $E(X) = G'_X(1)$.
(HP ancien programme) X est de variance finie ssi G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas $E(X(X-1)) = G''_X(1)$, $E(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$, $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.
(HP) Si $R(\sum P(X=n)t^n) > 1$ alors $\forall k \in \mathbb{N},\ E(X(X-1)\cdots(X-k+1)) = G_X^{(k)}(1)$.
Savoir le reprouver en particulier pour $k=2$ pour montrer que $V(X)$ est finie et la calculer.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes (à valeurs dans $\mathbb{N}$).

Inégalités de concentration et loi faible des grands nombres

Inégalité de Markov
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Loi faible des grands nombres : Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de VAD réelles i.i.d.,
on pose $m = E(X_1)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$