Programme de colle n° 17 10 fév – 14 fév ♡

Espérance et variance de variables aléatoires discrètes

Espérance

Espérance d'une VAD à valeurs dans $[0, +\infty]$, cas à valeurs dans $\mathbb{N}$: $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.
Une VA discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est d'espérance finie si $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, dans ce cas $E(X) = \sum_{x \in X\Omega} xP(X = x)$.
Espérances finies des variables géométriques et de Poisson.
Formule de transfert, cas d'un couple (ou n-uplet).
Inégalité triangulaire, théorème de comparaison, cas particulier d'une VAD bornée.
Linéarité de l'espérance, variable centrée, positivité, croissance.
Si X est positive d'espérance nulle alors $X = 0$ presque sûrement.
Produit de variables aléatoires indépendantes et d'espérance finie.

Variance

Les VAD sont maintenant réelles.
(HP) Définitions des moments d'une VA, lien entre les existences de moments.
Si X^2 est d'espérance finie alors X est d'espérance finie.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors XY admet une espérance finie et $E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$, cas d'égalité.
Stabilité par CL des VA admettant un moment d'ordre 2.
Définition de la variance, variance finie. Positivité, cas nul. $V(aX + b)$.
Formule (théorème) de Koenig-Huygens : X admet une variance finie ssi X^2 admet une espérance finie et dans ce cas : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
Écart-type, variable réduite, variable centrée réduite associée à une VA X.
Variance finie des variables géométriques et de Poisson.

Covariance

Définition de $\mathrm{Cov}(X, Y)$ lorsque X et Y sont de variance finie. Variables décorrélées.
Formule de Koenig-Huygens : $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
Bilinéarité, cas de deux VA indépendantes.
Variance d'une somme finie, cas de variables 2 à 2 indépendantes (décorrélées suffisant).

Fonctions génératrices

X est ici à valeurs dans $\mathbb{N}$.
$G_X(t) = E(t^X)$, définie ssi $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(X = n)t^n$ est ACV.
Série entière $\sum P(X = n)t^n$ (série génératrice de X) : rayon de convergence $\geqslant 1$, convergence normale sur $[-1, 1]$, somme G_X définie et continue sur $[-1, 1]$.

La fonction génératrice caractérise la loi.
X est d'espérance finie ssi G_X est dérivable en 1 et dans ce cas $E(X) = G'_X(1)$.
(HP ancien programme) X est de variance finie ssi G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas $E(X(X-1)) = G''_X(1)$, $E(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$, $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.
(HP) Si $R(\sum P(X = n)t^n) > 1$ alors $\forall k \in \mathbb{N},\ E(X(X-1)\cdots(X-k+1)) = G_X^{(k)}(1)$.
Savoir le reprouver en particulier pour $k = 2$ pour montrer que $V(X)$ est finie et la calculer.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes (à valeurs dans $\mathbb{N}$).

Inégalités de concentration et loi faible des grands nombres

Inégalité de Markov
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Loi faible des grands nombres : Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de VAD réelles i.i.d.,
on pose $m = E(X_1)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors : $\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

Formes bilinéaires symétriques définies positives. On a noté $(x \mid y)$.
Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens.
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ confondu avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $(X^T Y)$, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(\mathrm{tr}(A^T B)$,
produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a, b])$.
Norme (euclidienne) associée à un produit scalaire. Identités remarquables ($||u \pm v||^2$ et identité de polarisation).
Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.
Inégalité triangulaire et cas d'égalité.
Une norme associée à un produit scalaire est bien une norme (euclidienne).

Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore. Orthogonal $A^\perp$ d'une partie A, d'un sous-espace vectoriel .
$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. Propriétés de l'orthogonal.
$x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!]\,,\ (e_i \mid x) = 0$.
Sous-espaces orthogonaux. Familles orthogonales, orthonormales (ou orthonormées).
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Bases orthonormées. Existence dans un sous-espace vectoriel de dim finie.
Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.
Représentation d'une forme linéaire à l'aide d'un produit scalaire.

Projection orthogonale

Si F sous-espace vectoriel de dim finie de E (epr) alors $E = F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$, supplémentaire orthogonal,
Cas euclidien : $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$, supplémentaire orthogonal d'une droite et d'un hyperplan, vecteur normal à un hyperplan.
Partition/concaténation de bases orthonormées , théorème de la base orthonormée incompléte.
Projection orthogonale p_F sur un sous-espace vectoriel F de dimension finie et $p_{F^\top}$ sur $F^\perp$, $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{Id}_E$.
Symétrie orthogonale s_F par rapport à F de dimension finie, $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E - 2p_{F^\perp}$.

Détermination de $p_F(x)$ par résolution d'un système :
Si $F = \mathrm{Vect}(e, \dots, e_p)$ alors $p_F(x)$ est l'unique vecteur $y = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in F$ vérifiant : $\forall i \in [\![1, p]\!]\,,\ (x - y \mid e_i) = 0$.

Détermination de $p_F(x)$ par une base orthonormée de F :
Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F alors $p_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)\, e_i$.

Cas d'une base orthogonale de F, projection orthogonale sur $F = \mathrm{Vect}(u)$: $\quad p_F(x) = \dfrac{(u \mid x)}{||u||^2} u$.

Projection orthogonale sur un hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$: $\quad p_H(x) = x - \dfrac{(u \mid x)}{||u||^2} u$.

Distance (euclidienne) associée au produit scalaire.
Distance $d(x, A)$ d'un vecteur x à une partie non vide A.
Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie.
Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F, existence d'un minimum.
Calculs pratiques de distance suivant la démarche :

$$\begin{aligned}
d(x,F)^2 = ||x - p_F(x)||^2 = ||x||^2 - ||p_F(x)||^2 &= ||x||^2 - \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)^2 && \text{quand } (e_1, \dots, e_p) \text{ est une BON de } F \\
&= ||p_{F^\top}(x)||^2 && \text{utile si } F^\perp \text{ de dimension inférieure à } F \\
&= (x - p_F(x) \mid x - p_F(x)) = (x \mid x - p_F(x)) && \text{quand } p_F(x) \text{ obtenu par un système}
\end{aligned}$$

Distance à un hyperplan $H = \mathrm{Vect}(u)^\perp$: $\quad d(x, H) = \dfrac{|(u \mid x)|}{||u||}$