Programme de colle n° 18 3 mars – 7 mars

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

Formes bilinéaires symétriques définies positives. On a noté $(\, x \mid y\,)$.
Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens.
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ confondu avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (X^TY), sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(\mathrm{tr}(A^TB)$,
produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a,b])$.
Norme (euclidienne) associée à un produit scalaire. Identités remarquables ($||u \pm v||^2$ et identité de polarisation).
Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.
Inégalité triangulaire et cas d'égalité.
Une norme associée à un produit scalaire est bien une norme (euclidienne).

Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore. Orthogonal $A^\perp$ d'une partie A, d'un sous-espace vectoriel .
$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. Propriétés de l'orthogonal.
$x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ (\, e_i \mid x\,) = 0$.
Sous-espaces orthogonaux. Familles orthogonales, orthonormales (ou orthonormées).
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Bases orthonormées. Existence dans un sous-espace vectoriel de dim finie.
Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.
Représentation d'une forme linéaire à l'aide d'un produit scalaire.

Projection orthogonale

Si F sous-espace vectoriel de dim finie de E (epr) alors $E = F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$, supplémentaire orthogonal,
Cas euclidien : $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$, supplémentaire orthogonal d'une droite et d'un hyperplan, vecteur normal à un hyperplan.
Partition/concaténation de bases orthonormées , théorème de la base orthonormée incomplète.
Projection orthogonale p_F sur un sous-espace vectoriel F de dimension finie et $p_{F^\top}$ sur $F^\perp$, $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{Id}_E$.
Symétrie orthogonale s_F par rapport à F de dimension finie, $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E - 2p_{F^\perp}$.

Détermination de $p_F(x)$ par résolution d'un système :
Si $F = \mathrm{Vect}(e, \ldots, e_p)$ alors $p_F(x)$ est l'unique vecteur $y = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in F$ vérifiant : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ (\, x - y \mid e_i\,) = 0$.

Détermination de $p_F(x)$ par une base orthonormée de F :
Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de F alors $p_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (\, e_i \mid x\,)\, e_i$.

Cas d'une base orthogonale de F, projection orthogonale sur $F = \mathrm{Vect}(u)$: $p_F(x) = \dfrac{(\, u \mid x\,)}{||u||^2} u$.

Projection orthogonale sur un hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$: $p_H(x) = x - \dfrac{(\, u \mid x\,)}{||u||^2} u$.

Distance (euclidienne) associée au produit scalaire.
Distance $d(x, A)$ d'un vecteur x à une partie non vide A.
Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie.
Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F, existence d'un minimum.
Calculs pratiques de distance suivant la démarche :

$$
\begin{aligned}
d(x,F)^2 = ||x - p_F(x)||^2 = ||x||^2 - ||p_F(x)||^2 &= ||x||^2 - \sum_{i=1}^{p} (\, e_i \mid x\,)^2 && \text{quand } (e_1, \ldots, e_p) \text{ est une BON de } F \\
&= ||p_{F^\top}(x)||^2 && \text{utile si } F^\perp \text{ de dimension inférieure à } F \\
&= (\, x - p_F(x) \mid x - p_F(x)\,) = (\, x \mid x - p_F(x)\,) && \text{quand } p_F(x) \text{ obtenu par un système}
\end{aligned}
$$

Distance à un hyperplan $H = \mathrm{Vect}(u)^\perp$: $d(x, H) = \dfrac{|\,(\, u \mid x\,)\,|}{||u||}$

Isométries vectorielles et matrices orthogonales

⚠ *(Pas d'endomorphismes autoadjoints cette semaine)*

Isométries vectorielles

Conservation de la norme, caractérisations par conservation du produit scalaire, par l'image d'une/ de toute base orthonormée .
$\mathcal{O}(E)$ groupe orthogonal de E stable par composée et passage à l'inverse.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Les symétries orthogonales sont des isométries, réflexions.

Matrices orthogonales

Définition, interprétation/caractérisation en termes de colonnes et de lignes.
Caractérisation matricielle en base orthonormée d'une isométrie . Caractérisation d'une matrice orthogonale par matrice de changement de base orthonormée .
$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{O}(n)$) groupe orthogonal d'ordre n. Déterminant d'une matrice orthogonale, groupe spécial orthogonal d'ordre n $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{SO}(n)$, ($\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ HP)). Stabilité par produit et passage à l'inverse.

Orientation

Bases orthonormées directes/indirectes. Produit mixte, interprétation en termes d'aire/volume. Notation $[u,v]$, $[u,v,w]$, ...
Dans un espace euclidien orienté de dimension 3 :
produit vectoriel, calcul en base orthonormée directe . Propriétés,
si (u,v,w) BOND alors $w = u \wedge v$, si (u,v) orthonormale alors $(u,v,u \wedge v)$ BOND.
Orientation d'un plan par un vecteur normal.

Description des isométries d'un plan euclidien orienté

Description de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, matrices de rotation $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Commutativité sur $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.
Description de $\mathcal{O}(E)$: les rotations et les réflexions. Mesure de l'angle d'une rotation.
Mesure d'un angle orienté de deux vecteurs non nuls (notion).

Isométries d'un espace euclidien orienté de dimension 3

Rotations vectorielles, mesure θ de l'angle de la rotation r autour de la droite $E_1(r) = \mathrm{Vect}(u)$ orienté par u, réduction dans une BOND $\mathcal{B} = (\frac{u}{||u||}, e_2, e_3)$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R(\theta) \end{pmatrix}$.
$\mathrm{tr}(r) = 1 + 2\cos(\theta)$.
Pour tout $x \notin E_1(r)$, $\sin\theta$ du signe du produit mixte $[u, x, r(x)]$ (utilisé mais $\sim$ HP).
Description de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, matrices de la forme $A = P \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R(\theta) \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.