Programme de colle n° 19 10 mars – 14 mars

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Isométries vectorielles

Conservation de la norme, caractérisations par conservation du produit scalaire, par l'image d'une/ de toute base orthonormée .
$\mathcal{O}(E)$ groupe orthogonal de E stable par composée et passage à l'inverse.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Les symétries orthogonales sont des isométries, réflexions.

Matrices orthogonales

Définition, interprétation/caractérisation en termes de colonnes et de lignes.
Caractérisation matricielle en base orthonormée d'une isométrie . Caractérisation d'une matrice orthogonale par matrice de changement de base orthonormée .
$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{O}(n)$) groupe orthogonal d'ordre n. Déterminant d'une matrice orthogonale, groupe spécial orthogonal d'ordre n $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{SO}(n)$, ($\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ HP)). Stabilité par produit et passage à l'inverse.

Orientation

Bases orthonormées directes/indirectes. Produit mixte, interprétation en termes d'aire/volume. Notation $[u,v]$, $[u,v,w]$, ...
Dans un espace euclidien orienté de dimension 3 :
produit vectoriel, calcul en base orthonormée directe . Propriétés,
si (u,v,w) BOND alors $w = u \wedge v$, si (u,v) orthonormale alors $(u,v,u\wedge v)$ BOND.
Orientation d'un plan par un vecteur normal.

Description des isométries d'un plan euclidien orienté

Description de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, matrices de rotation $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Commutativité sur $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.
Description de $\mathcal{O}(E)$: les rotations et les réflexions. Mesure de l'angle d'une rotation.
Mesure d'un angle orienté de deux vecteurs non nuls (notion).

Isométries d'un espace euclidien orienté de dimension 3

Rotations vectorielles, mesure θ de l'angle de la rotation r autour de la droite $E_1(r) = \mathrm{Vect}(u)$ orienté par u, réduction dans une BOND $\mathcal{B} = (\frac{u}{||u||}, e_2, e_3)$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R(\theta) \end{pmatrix}$.
$\mathrm{tr}(r) = 1 + 2\cos(\theta)$.
Pour tout $x \notin E_1(r)$, $\sin\theta$ du signe du produit mixte $[u, x, r(x)]$ (utilisé mais $\sim$ HP).
Description de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, matrices de la forme $A = P \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R(\theta) \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

Endomorphisme autoadjoint, $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux (parmi les projecteurs). Caractérisation matricielle en base orthonormée des autoadjoints.
Si F est stable par u autoadjoint alors $F^\perp$ également.
Les sous-espaces propres d'un autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.
Théorème spectral :
Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.
Formulation matricielle pour les matrices symétriques réelles.

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Caractérisation spectrale, notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive. Caractérisation spectrale, notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.