Programme de colle n° 20 17 mars – 21 mars

Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

Endomorphisme autoadjoint, $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux (parmi les projecteurs). Caractérisation matricielle en base orthonormée des autoadjoints.

Si F est stable par u autoadjoint alors $F^{\perp}$ également.
Les sous-espaces propres d'un autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.
Théorème spectral :
Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.
Formulation matricielle pour les matrices symétriques réelles.

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Caractérisation spectrale, notations $\mathcal{S}^{+}(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive. Caractérisation spectrale, notations $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Révisions EDL2 à coefficients constants et EDL1

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

EDL2 à coefficients continus (E) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ (réduite) sur un intervalle I.
Condition initiale (t_0, y_0, y'_0), problème de Cauchy.
Théorème de Cauchy linéaire.
Structure de l'ensemble des solutions : $\mathcal{S}_{E_0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{K})$, $\mathcal{S}_E = \varphi_p + \mathcal{S}_{E_0}$.
Principe de superposition, $\dim \mathcal{S}_{E_0} = 2$.

Exemples d'utilisation de développements en série entière pour la recherche de solutions.
Utilisation d'un changement de variable, d'un changement de fonction.
Exemples de résolution d'une EDL2 non réduite.

Révisions sur la continuité et la dérivabilité

Dérivation des fonctions vectorielles

f désigne une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ (d'intérieur non vide) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Dérivabilité de f en $t_0 \in I$, dérivée ou vecteur dérivée $f'(t_0)$ de f en t_0.
Caractérisation par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 (on a défini $\mathrm{o}(t - t_0)$ et utilisé $(t - t_0)\varepsilon(t)$).
Caractérisation par la dérivabilité des fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_n$ de f.
Interprétation géométrique (arc paramétré).
Interprétation cinématique (position temporel, vecteur vitesse).

Dérivabilité sur I, fonction dérivée.
Caractérisation des fonctions constantes.
$\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, linéarité de la dérivation.
Dérivée de $L(f)$ $(= L \circ f)$ où L est linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et f dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $(L(f))' = L(f')$.
Dérivée de $B(f, g)$ où B est bilinéaire, de $M(g_1, \dots, g_p)$ où M est p-linéaire.
Exemples du produit scalaire et du déterminant dans une base de $\mathbb{R}^n$.
Dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est à valeurs dans I.

Fonctions de classe $\mathcal{D}^k$, de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R}^n)$, linéarité de la dérivée k-ème.
Caractérisations par les fonctions coordonnées.