Programme de colle n° 21 — 24 mars – 28 mars

Révisions EDL2 à coefficients constants et EDL1

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

EDL2 à coefficients continus (E) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ (réduite) sur un intervalle I.
Condition initiale (t_0, y_0, y_0'), problème de Cauchy.
Théorème de Cauchy linéaire.
Structure de l'ensemble des solutions : $\mathcal{S}_{E_0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{K})$, $\mathcal{S}_E = \varphi_p + \mathcal{S}_{E_0}$.
Principe de superposition, $\dim \mathcal{S}_{E_0} = 2$.
Exemples d'utilisation de développements en série entière pour la recherche de solutions.
Utilisation d'un changement de variable, d'un changement de fonction.
Exemples de résolution d'une EDL2 non réduite.

Révisions sur la continuité et la dérivabilité

Dérivation des fonctions vectorielles

f désigne une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ (d'intérieur non vide) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Dérivabilité de f en $t_0 \in I$, dérivée ou vecteur dérivée $f'(t_0)$ de f en t_0.
Caractérisation par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 (on a défini $\mathrm{o}(t - t_0)$ et utilisé $(t - t_0)\varepsilon(t)$).
Caractérisation par la dérivabilité des fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_n$ de f.
Interprétation géométrique (arc paramétré).
Interprétation cinématique (position temporel, vecteur vitesse).
Dérivabilité sur I, fonction dérivée.
Caractérisation des fonctions constantes.
$\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, linéarité de la dérivation.
Dérivée de $L(f)$ $(= L \circ f)$ où L est linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et f dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $(L(f))' = L(f')$.
Dérivée de $B(f, g)$ où B est bilinéaire, de $M(g_1, \ldots, g_p)$ où M est p-linéaire.
Exemples du produit scalaire et du déterminant dans une base de $\mathbb{R}^n$.
Dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est à valeurs dans I.
Fonctions de classe $\mathcal{D}^k$, de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R}^n)$, linéarité de la dérivée k-ème.
Caractérisations par les fonctions coordonnées.

Fonctions de plusieurs variables

NB *Sans les applications géométriques (courbes et surfaces, tangentes et plans tangents)*

Dérivée selon un vecteur notation $D_v f(a)$.
Dérivées partielles d'ordre 1
Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, opérations, DL_1, différentielle de f en a notation $df(a).h$.
Régle(s) de la chaîne.
Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.
Gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, notation $\nabla f(a)$ (réécriture du DL_1).

Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, théorème de Schwarz, matrice hessienne notation $H_f(a)$, symétrique.,
DL_2 ou formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + \mathrm{o}(||h||^2)$.

Extremum local, global (strict ou pas).
Point critique d'une application de classe $\mathcal{C}^1$.
(*CN*) Si une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ admet un extremum local en un point $a \in \Omega$, alors a est un point critique de f.
(*CS*) Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de Ω de $\mathbb{R}^p$ et $a \in \Omega$ est un point critique de f alors :

- Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ (ce qui équivaut à toutes les vp > 0) alors f admet un minimum local strict en a
- Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{+}(\mathbb{R})$ (équivaut à l'existence d'une vp < 0) alors f n'admet pas de minimum local en a.
- Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{--}(\mathbb{R})$ (ce qui équivaut à toutes les vp < 0) alors f admet un maximum local strict en a.
- Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{-}(\mathbb{R})$ (équivaut à l'existence d'une vp > 0) alors f n'admet pas de maximum local en a

Merci à tous les colleurs pour votre précieuse intervention en PSI cette année.