Pour les élèves de PSI/PSI*, le premier samedi suivant la rentrée aura lieu le premier DS. Une interrogation de deux heures portera sur plusieurs des questions ci-dessous.

Les questions marquées d'une étoile s'adressent plus particulièrement aux élèves de classe étoilée.

# 1 Nombres complexes

**Question 1. Racines de l'unité**

1. Déterminer le nombre des racines $n$-ièmes de l'unité distinctes, $n \in \mathbb{N}^*$, et en donner la liste en les écrivant sous forme trigonométrique $e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $z$ une racine $n$-ième de l'unité différente de 1. On considère la somme $S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k$. Calculer $(z-1)S$ et en déduire la valeur de $S$.

**Question 2. Calcul de somme**

Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $z \in \mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $S = \sum_{k=0}^{n-1}(z+\omega^k)^n$. Calculer $S$.

# 2 Suites numériques

**Question 3. Étude d'une suite récurrente**

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son terme général $u_0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos u_n$. On note $f$ la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos x$.

1. Montrer que l'intervalle $I = [0, 1]$ est stable par $f$.
2. On suppose que $u_0 \in I$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
3. Montrer qu'il existe un unique point fixe $a$ de $f$ dans $I$.
4. Montrer qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tout $x \in I$, $|\cos x - a| \leq k|x - a|$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leq k^n|u_0 - a|$.
6. Conclure quant à l'existence et la valeur éventuelle de la limite de la suite $u$.

**Question 4. Variations sur un résultat de Césaro ***

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On considère la suite de terme général défini pour $n \in \mathbb{N}^*$ en posant $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.

1. On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
2. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont de même nature.

**Question 5. Définition de la limite d'une suite**

Soit $(u_n)$ une suite de réels non nuls tels que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow 0$.

1. Montrer qu'à partir d'un rang $N$, $|u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|u_n|$.
2. En déduire que : $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} |u_N|$, et donner la limite de $(u_n)$.

**Question 6. Étude d'une suite implicite**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n$ sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx + n - e^x$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue réelle $x$ admet une unique solution $x_n$ dans $]-\infty, 0]$.
2. Calculer $f_n(x_{n+1})$ puis justifier que la suite $x$ est monotone.
3. Justifier que $x$ est convergente et préciser sa limite $\ell$.
4. Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$.

**Question 7. Suites adjacentes**
On définit la suite $H$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$.
   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
   c) Donner un équivalent simple de $H_n$ puis la limite de la suite $(H_n)$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$.
   a) Montrer que les suites $u$ et $v$ sont adjacentes.
   b) Le limite commune des suites $u$ et $v$ est notée $\gamma$ et appelée *constante d'Euler*.
   Justifier que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

# 3 Continuité

**Question 8. Étude de continuité**
Déterminer sur quels intervalles les fonction suivantes sont continues :

1. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ définie par $f(x) = x \ln x$ si $x \neq 0$ ; $f(x) = +1$ si $x = 0$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ définie par $f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ si $x \neq 1$ ; $f(x) = n + 1$ si $x = 1$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x \neq 0$ ; $f(x) = 0$ si $x = 0$.

**Question 9. Théorème des valeurs intermédiaires**

1. Énoncer et démontrer le théorème des valeurs intermédiaires. *Question (*). Si vous connaissez plusieurs versions du théorème, il faut savoir montrer qu'elles sont équivalentes.*
2. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -1$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +1$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.
3. Soit $f$ définie sur $I = [a, b]$. On suppose que $I$ est stable par $f$ i.e $\forall x \in I,\ f(x) \in I$. Démontrer que, si $f$ est continue, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

# 4 Dérivabilité

**Question 10. Lemme de Rolle**

1. Énoncer et démontrer le lemme de Rolle.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit une fonction $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} f(a)$. Montrer qu'il existe $x_0 \in ]a, +\infty[$ tel que $f'(x_0) = 0$.
   *Comme pour la preuve du lemme de Rolle, on pourra distinguer deux cas selon que $f$ est constante ou non. Dans le cas où il existe $b > a$ tel que $f(b) \neq f(a)$, on montrera que $f$ admet un extremum sur $]a, +\infty[$.*

**Question 11. Étude de la dérivabilité d'une fonction**
Déterminer en quels points la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{Arcsin}(1 - x^4)$ est dérivable.

# 5 Polynômes

**Question 12. Formule de Taylor**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la formule de Taylor pour les polynômes et en déduire le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $(X - 1)^3$.

**Question 13. Racines**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$.

# 6 Analyse asymptotique

**Question 14. Étude de la convergence de suites réelles**
Utiliser des équivalents ou des relations de comparaison pour étudier la convergence des suites de terme général suivant quand $n \to +\infty$.

1. $u_n = n \ln \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$.
2. $u_n = \left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^n$.
3. $u_n = \left(\dfrac{1 - \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}}\right)^n$.
4. $u_n = \sqrt[n]{n}$
5. $u_n = \left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}\right)^n$.
6. $u_n = \left(\dfrac{n}{n-x}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$.

**Question 15. Calcul de limites par analyse asymptotique**
Déterminer les limites des fonctions suivantes au point considéré.

1. $f : x \mapsto \ln(\sqrt{1+x}) - \dfrac{\mathrm{Arccos}\, x - \frac{\pi}{2}}{\mathrm{sh}\, x}$ en 0.
2. $f : x \mapsto \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$ en $+\infty$ ; $a \in \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$ en 1.
4. $f : x \mapsto (\mathrm{ch}\, x)^{\frac{1}{\mathrm{Arcsin}^2 x}}$ en 0.

# 7 Espaces vectoriels

**Question 16. Vrai ou faux ?**

a) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

(1) De toute famille libre dans $E$ on peut extraire une base de $E$.

(2) Une famille génératrice de $E$ contient au moins n vecteurs.

(3) De toute famille génératrice de $E$ on peut extraire une base de $E$.

(4) Une famille libre dans $E$ contient au moins $n$ vecteurs.

(5) Une famille génératrice de $E$ peut se compléter en une base de $E$.

(6) Il existe une base de $E$ contenant $n$ vecteurs.

(7) Une famille libre peut être complétée en une base de $E$.

b) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ de dimensions respectives 3 et 4.

(1) $F \times G$ est de dimension 12.

(2) $F + G$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 7.

(3) $n \geq 4$.

(4) Si $n = 7$ alors $F$ et $G$ sont supplémentaires.

(5) Si $n = 4$ alors $F$ admet un supplémentaire de dimension 1.

(6) $F$ admet une infinité de supplémentaires.

(7) Il existe un sev $H$ tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$.

**Question 17. Liberté**

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille dans un espace vectoriel. Montrer que la famille $(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$ est libre si et seulement si la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ est libre et $X_{n+1} \notin \text{Vect}\,(X_1, \ldots, X_n)$.

**Question 18. Réunion et intersection de deux sous-espaces vectoriels**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.

1. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. Montrer que $F \cap G = F + G \iff F = G$.

**Question 19. Sous-espace engendré par une partie ***

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ et des parties $A, B \subset E$. On définit $\text{Vect}\,(A)$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs de $A$ : $x \in \text{Vect}\,(A)$ si et seulement s'il existe $(a_i)_{i\in I} \in A^I$, où $I$ est un ensemble fini, et $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i a_i$.

1. On suppose $A \subset B$. Montrer que $\text{Vect}\,(A) \subset \text{Vect}\,(B)$.
2. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Montrer que $\text{Vect}\,(F) = F$.
3. En déduire que $\text{Vect}\,(\text{Vect}\,(A)) = \text{Vect}\,(A)$.

**Question 20. Base des polynômes de Lagrange**
La notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ une famille de $n+1$ scalaires distincts deux à deux et $L_0, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange définis par $L_i = \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

1. Montrer que la famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Étant donné $P \in \mathbb{K}_n[X]$, montrer l'égalité $P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i$. Que peut-on en déduire ?

**Question 21. Sous-espaces supplémentaires**
Dans chacun des cas suivants, montrer que les sous-espaces $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$.

1. $F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$, $G = \mathrm{Vect}\,(u)$ où $u = (1, 1, \dots, 1)$ et $E = \mathbb{R}^n$.
2. $F = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \int_0^1 f(t)dt = 0\}$, $G$ le sous-espace vectoriel des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ et $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**Question 22. Supplémentaire et somme directe**
On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. Si $E = E_1 + E_2$ et $E_2'$ est un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans $E_2$, montrer alors que $E = E_1 \oplus E_2'$.

# 8 Espaces vectoriels de dimension finie

**Question 23. Théorème du rang**

1. Démontrer le théorème du rang. *On en rappelle l'énoncé : si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$, alors* $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{rg}\, u$.
2. Soient un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^2$. Est-ce vrai en dimension infinie ?

**Question 24. Projecteurs**
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p$ un projecteur de $E$, c'est-à-dire un endomorphisme de $E$ vérifiant $p \circ p = p$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\, p = \{x \in E \mid p(x) = x\}$.
3. Dans $E = \mathbb{K}\,[X]$, on considère l'application $f$ qui à tout polynôme $P$ associe son reste dans la division euclidienne par $X^2 + 1$. Montrer que $f$ est un projecteur de $E$, puis déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.
4. Soient $f$ et $g$ deux éléments de $\mathcal{L}(E)$.
   Montrer que : $(f \circ g = f$ et $g \circ f = g) \iff (f$ et $g$ sont deux projecteurs de même noyau$)$.

## 9 Applications linéaires

**Question 25. Inégalité triangulaire pour le rang**
Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Montrer chacune des assertions suivantes :

(i) $\operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

(ii) $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u-v)$.

(iii) Montrer que : $\operatorname{rg}(u+v) = \operatorname{rg}\ (u) + \operatorname{rg}\ (v) \Longleftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0\} \\ \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v = E \end{cases}$

**Question 26. Injectivité, bijectivité d'un endomorphisme** *
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $g \in \mathscr{L}(E)$. On considère l'application $\varphi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), f \mapsto g \circ f$.

1. Vérifier que $\varphi$ est linéaire.
2. Montrer que $\varphi$ est injective (resp. bijective) si et seulement si $g$ est injective (resp. bijective).
   *On admettra que tout sous-espace de $E$ admet un supplémentaire, même si $E$ n'est pas de dimension finie.*

## 10 Matrices

**Question 27. Calcul de rang**
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de chacun des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & 1 \\ 2 & 0 & 3-a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}.$$

**Question 28. Inversibilité**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $B = A + I_n$.
1. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer $X^\top AX$.
2. En déduire que $B$ est inversible. *On pourra raisonner par l'absurde.*

## 11 Probabilités

**Question 29. Couple de variables aléatoires**
Soit $n$ un entier naturel non nul. On choisit au hasard un nombre entier $X$ dans $[\![1, n]\!]$, puis au hasard, un nombre entier $Y$ dans $[\![1, X]\!]$.

1. Déterminer la loi du couple $(X, Y)$.
2. Déterminer la loi de $Y$.
3. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de $X$ sachant $[Y = j]$.

**Question 30. Loi d'un minimum**
On considère $n$ variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur le même espace probabilisé et suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $m = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(m \geqslant k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
2. En déduire la loi de $m$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(\exists i \in [\![1, n]\!], X_i = 1) \geqslant 1 - 1/e$.

# 12 Intégration

**Question 31. Intégrales de Wallis**
On appelle intégrale de Wallis le réel $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $I_0$ et $I_1$, puis justifier à l'aide d'un changement de variable que : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$.
2. Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)$ et justifier sa convergence.
3. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.
5. En déduire un équivalent de $I_n$.

**Question 32. Formule de Taylor avec reste intégral**

1. Soient $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.
   Montrer par récurrence sur $n$ que : $\forall x \in I, \quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.
2. Démontrer que : $\forall x \in [0, \pi/2], \quad 1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

# 13 Espaces préhilbertiens réels

**Question 33. Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$**
Vérifier que l'application $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire.

**Question 34. Inégalité de Cauchy-Schwarz**

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. En déduire que, pour toute fonction $f$ continue sur $[0, 1]$ à valeurs réelles, $\left(\displaystyle\int_0^1 f(t) dt\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t) dt$.
3. Caractériser le cas d'égalité.

# 14 Séries numériques

**Question 35. Série géométrique**
On considère la suite de terme général $u_n = q^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $q \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
   Dans le cas où la série $\sum u_n$ converge, calculer le terme général de la suite des sommes partielles et le terme général de la suite des $n$-ièmes restes.
2. On considère $r \in ]-1,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature des séries $\sum r^n \cos(n\theta)$ et $\sum r^n \sin(n\theta)$ et calculer leur somme le cas échéant.

**Question 36. Comparaison des séries à termes positifs**

1. On considère deux suites réelles positives $u$ et $v$ et on suppose que $u_n \sim v_n$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la convergence de la suite de terme général $n^\alpha (\ln n)^{-\sqrt{n}}$.
3. En déduire la nature de la série $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^{\sqrt{n}}}$.