1 Nombres complexes

Question 1. Racines de l'unité

1. Cours
2. $(z-1)S = nz^n$

Question 2. Calcul de somme
$n(z^n+1)$ par binôme et interversion de sommes

2 Suites numériques

Question 3. Étude d'une suite récurrente On commence par noter que la suite est bien définie (chaque terme de la suite existe bien).

1. variations de f
2. récurrence
3. TVI et stricte monotonie appliqué à $x \mapsto f(x) - x$
4. IAF
5. récurrence
6. théorème d'encadrement

Question 4. Variations sur un résultat de Césaro *

1. non a priori, trouver un contre-exemple avec (u_n) bornée et divergente.
2. Césaro (HP) donne $\big($ (u_n) CV $\Rightarrow$ (v_n) CV $\big)$ et
   Si (u_n) diverge alors c'est en tendant vers $+\infty$, Césaro version infini permet alors de conclure la réciproque avec $v_n \to +\infty$.

Question 5. Définition de la limite d'une suite

1. définition de la cv vers 0 de la valeur absolue avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$
2. récurrence, encadrement

Question 6. Étude d'une suite implicite

1. unique solution sur $\mathbb{R}_-$
   variations, TVI + stricte croissante
2. $f_n(x_{n+1}) = -x_{n+1} - 1$ or $f_{n+1}(-1) < 0$ donc $x_{n+1} > -1$ donc $f_n(x_{n+1}) = -x_{n+1} - 1 < 0 = f_n(x_n)$ donc $x_{n+1} < x_n$ par croissance de f_n sur $\mathbb{R}_-$ (stricte inutile)
3. $f_n(-1) < 0 = f_n(x_n)$ donc (x_n) décroissante et **minorée par -1** et de $f_n(x_n) = 0$ on tire $x_n = \dfrac{e^{x_n}}{n} - 1 \to -1$

4. $x_n + 1 = \dfrac{e^{x_n}}{n} \sim \dfrac{e^{-1}}{n}$.

Question 7. Suites adjacentes

1. (a) TAF pour ln sur $[k, k+1]$
   (b) par sommation
   (c) $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ car $\ln(n+1) - \ln(n) = \mathrm{o}(\ln n)$ équivalent $\ln(n)$ par encadrement
2. (a) avec $1.a$
   (b) $u_n \to \gamma$ donc $u_n = \gamma + \mathrm{o}(1)$

3 Continuité

Question 8. Étude de continuité

Il s'agit du même principe dans les trois cas, la fonction est continue sauf éventuellement en un point a par opérations usuelles sur les fonctions continues. Il reste à vérifier si f est continue en a *ie* si on a bien $f(x) \underset{x\to a}{\to} = f(a)$.

1. par croissances comparées $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \neq f(0)$ donc f n'est pas continue en 0 mais elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit de fonctions continues.
2. continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations usuelles et en 0 en reconnaissant une somme usuelle (géométrique...) donc continue sur $\mathbb{R}$.
3. continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations usuelles mais pas en 0 par limite à droite et à gauche différentes.

Question 9. Théorème des valeurs intermédiaires

1. Cours
2. Par la définition des limites on montre qu'il existe a tel que $f(a)- \leqslant -\frac{1}{2}$ et b tel que $f(b) \geqslant \frac{1}{2}$.
3. Utiliser TVI sur $g : x \mapsto f(x) - x$.

4 Dérivabilité

Question 10. Lemme de Rolle

1. Cours
2. Si f non constante il existe $b > a$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Quitte à raisonner sur $-f$ on suppose $f(b) > f(a) = \lim \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ donc il existe un réel $c > b$ tel que $f(c) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$.
   f est continue sur $[a, c]$ donc y admet un maximum qui n'est pas atteint en a ni c donc sur $]a, c[$ donc f' s'annule pour ce maximum.

Question 11. Étude de la dérivabilité d'une fonction

$x \in D_f \Leftrightarrow 1 - x^4 \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in I = [-a, a]$ avec $a = 2^{\frac{1}{4}}$.

f est dérivable sur $I \backslash \{-a, a, 0\}$ par opérations usuelles sur les fonctions dérivables et en a, $-a$ et 0 on utilise le theoréme de la limite de la dérivée : limite finie pour la dérivée en 0 donc dérivable en 0, par contre limites infinies en $\pm a$ donc pas dérivable en $\pm a$.

5 Polynômes

Question 12. Formule de Taylor

$$P(X)=\sum_{k=0}^{\deg P}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Si $n<3$ le reste est X^n sinon, en posant $P=X^n$, on a :

$$P=\underbrace{\sum_{k=0}^{2}\frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-a)^k}_{\deg<3}+\sum_{k=3}^{\deg P}\frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-a)^k$$

$$=\underbrace{(1+n(X-1)+\frac{n(n-1)}{2}(X-1)^2}_{\text{reste}}+(X-1)^3\sum_{k=0}^{\deg P-3}\frac{P^{(k+3)}(a)}{(k+3)!}(X-a)^{k+3}$$

On peut aussi l'avoir, plus simplement, par le binôme de Newton avec $X^n=((X-1)+1)^n$.

Question 13. Racines

Il faut en fait $n\geqslant 2$ sinon c'est le polynôme nul dont on ne définit pas la multiplicité des racines (infinie).

Soit donc $n\geqslant 2$.

Il s'agit de déterminer combien de dérivées successives de P s'annule en 1 (caractérisation de la multiplicité des racines par les dérivées successives).

En considérant que $0*X^{-1}$ est le polynôme nul on obtient $P(1)=P'(1)=P''(1)=0$ et en étant efficace (mettre n(n-1) en facteur) que $P^{(3)}(1)=n(n-1)(2n+2)\neq 0$ donc 2 est racine de multiplicité 3 pour P lorsque $n\geqslant 3$ et de multiplicité 2 si $n=2$ (multiplicité inférieure ou égale au degré).

6 Analyse asymptotique

Question 14. Étude de la convergence de suites réelles

Quand $u_n\to 1$ on cherchera souvent à mettre $\ln(u_n)$ sous la forme $\ln(1+(u_n-1))\sim u_n-1$ soit par +1 -1 soit directement cf 1.

1. $u_n=\frac{n}{2}\ln\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)=\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\sim\frac{n}{2}\times\frac{2}{n-1}\sim\frac{n}{n}=1$ donc $u_n\to 1$.
2. $\ln(u_n)\sim n\frac{1}{n}$ donc $u_n\to e$.
3. $\ln(\cos\frac{1}{n})\sim-\frac{1}{2n^2}$ est négligeable devant $\ln(1-\frac{1}{n})\sim-\frac{1}{n}$ donc $\ln(u_n)\sim n\ln(1-\frac{1}{n})\sim -1$ donc $u_n\to\frac{1}{e}$
4. $\ln(u_n)\to 0$ donc $u_n=\exp(\ln(u_n))\to 1$
5. $u_n\geqslant 2^n$ donc $u_n\to+\infty$
6. $\ln(u_n)\sim n\times\frac{x}{n}$ donc $u_n\to e^x$

Question 15. Calcul de limites par analyse asymptotique

1. équivalent du quotient donne $f(x)\to 1$
2. $f(x)\to e^a$.
3. $f(x)\to\frac{1}{2}$ par $\ln(x)\sim(x-1)$ en 1.
4. $f(x)\to\sqrt{e}$ par $\ln(\text{ch}x)\underset{0}{\sim}\frac{x^2}{2}$ et $\text{Arcsin}(x)\underset{0}{\sim}x$.

7 Espaces vectoriels

Question 16. Vrai ou Faux

a) (1) faux
   (2) vrai
   (3) vrai
   (4) faux
   (5) faux
   (6) vrai
   (7) vrai

b) (1) faux (=7)
   (2) faux (ssi ils sont en somme directe)
   (3) vrai
   (4) faux
   (5) vrai
   (6) vrai
   (7) faux
   Je rajoute «si $n = 4$ alors $G = E$» : vrai ...

Question 17. Liberté

sens direct ok, car sous-famile également libre et aucun vecteur n'est Cl des autres.

réciproque par contraposée : $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$.

On suppose $(X_1, \dots X_{n+1})$ liée ($\overline{A}$). Soit une CL nulle $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i$ à coefficients non tous nuls.

- Si $(X_1, \dots X_n)$ liée alors $\overline{B}$ est vraie.
- Supposons $(X_1, \dots X_n)$ libre. Si $\lambda_{n+1} = 0$ alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i X_i = 0$ et à coefficients non tous nuls ce qui est absurde donc $\lambda_{n+1} \neq 0$ donc on peut exprimer X_{n+1} comme CL de $(X_1, \dots X_n)$ donc $\overline{B}$ est vraie.

Question 18. Réunion et intersection de deux sous-espaces vectoriels

1. réciproque immédiate, sens direct par contraposée en supposant ni F dans G ni G dans F. Soit donc $f \in F$ tq $f \notin G$ et $g \in G$ tq $g \notin F$.
   Alors $x = f + g$ n'appartient ni à F (sinon $g = x - f \in F$) ni à G (sinon $f = x - g \in G$) donc $f + g \notin F \cup G$ qui n'est donc pas un sous-espace vectoriel .
2. Le sens réciproque évident. Supposons $F \cap G = F + H$ or $F \cap G \subset F \subset F + G = F \cap G$ donc $F = F \cap G$ de même (symétrie en F et G) $G = F \cap G$ donc $F = G$.

Question 19. Sous-espace engendré par une partie *

1. Toute CL finie de A est une CL finie de B.
2. $F \subset \text{Vect}(F)$ et toute CL finie de vecteurs de F est dans F car stable par CL.
3. D'après 2., il suffit de prouver que $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E, même preuve que pour le vect d'une famille finie.

Question 20. Base des polynômes de Lagrange

1. Prendre une CL nulle et évaluer en chacun des a_i.

2. La différence des deux polynômes est de degré au plus n et admet $a_0, \dots, a_n$ pour racines.
On en déduit que la famille des L_i (dans $\mathbb{K}_n[X]$) est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. On savait en fait directement que c'était une base par le cardinal et la liberté.

Question 21. Sous-espaces supplémentaires

1. F est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et la droite G n'est pas incluse dans ce plan donc ils sont supplémentaires.
2. idem

Question 22. Supplémentaire et somme directe

$\dim E_1 + \dim E_2' = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2) = \dim(E_1 + E_2) = \dim E$ IL reste donc à prouver qu'ils sont en somme directe :

Soit $x \in E_1 \cap E_2' \subset E_1 \cap E_2$ alors $x \in E_2' \cap (E_1 \cap E_2) = \{0\}$ cqfd.

8 Espaces vectoriels de dimension finie

Question 23. Théorème du rang

On considère un supplémentaire H du noyau de $\operatorname{Ker} u$ dans E puis l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} H & \longrightarrow & \operatorname{Im} u, \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$
on montre qu'elle est bijective (bon exercice) puis $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim H = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u$.

Question 24. Projecteurs

1. théorème du rang et un élement x de l'intersection vérifie $x = p(y)$ et $p(x) = 0$ donc $p^2(y) = 0$ or $x = p(y) = p^2(y)$ donc $x = 0$.
2. l'inclusion réciproque est claire, pour celle directe : soit $x \in \operatorname{Im} p$ alors x s'écrit $p(y)$ et donc $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$ cqfd.
3. Soit $P_i n\mathbb{K}[X]$ $\deg f(P) < 2$ donc sa division euclidienne par $X^2 = 1$ est : $f(P) = 0.(X^2 + 1) + f(P)$ donc $f(f(P)) = f(P)$ donc $f^2 = f$.
   - $\operatorname{Ker} f = \mathbb{K}[X](X^2 + 1)$ ensemble des multiples de $X^2 + 1$.
   - $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{K}_1[X]$ et réciproquement tout polynôme P de $\mathbb{K}_1[X]$ vérifie $P = f(P) \in \operatorname{Im} f$ donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}_1[X]$.
   - $\Rightarrow$
     - $f \circ g \circ f = f^2$ or $f \circ g \circ f = f \circ g = f$ de même g est un projecteur par symétrie des rôles de f et g.
     - Soit $x \in \operatorname{Ker} f$ alors $0 = g \circ f(x) = g(x)$ donc $x_i n \operatorname{Ker} g$ donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$ et par symétrie $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$.

   $\Leftarrow$ $\forall x \in E,\ x - f(x) \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ donc $g(x - f(x)) = 0$ donc $g - g \circ f = 0$. Par symétrie on a aussi $f - f \circ g = 0$.

9 Applications linéaires

Question 25. Inégalité triangulaire pour le rang

(i) $\operatorname{Im}(u + v)) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$ donc $\dim(\operatorname{Im}(u + v)) \leqslant \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \leqslant \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Im} v)$

(ii) (i) appliqué à $u - v$ et v puis symétrie en u, v

(iii) (DUR cf Ex 29 corrigé différemment)

il y a égalité dans (i) ssi $\begin{cases} \dim(\operatorname{Im}(u+v)) = \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) & (1) \\ \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) = \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Im} v) & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow$ On suppose qu'il y a égalité dans (i) donc d'après (2) et Grassmann, on a $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0\}$. Il reste donc à prouver que $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v = E$. D'après (1) (l'un inclus dans l'autre) $\operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$ donc en particulier $\operatorname{Im} u \in \operatorname{Im}(u+v)$.

Soit $x \in E$ alors il existe $y \in E$ tq $u(x) = u(y) + v(y)$ donc $u(x-y) = v(y) \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0\}$ donc $y \in \operatorname{Ker} v$ et $x - y \in \operatorname{Ker} u$ donc $x = (x-y) + y \in \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$ donc $E \subset \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$, l'autre inclusion étant vraie on a donc égalité.

$\Leftarrow$ On suppose $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0\}$ et $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v = E$ le premier point assure (1) par Grassmann. Il reste à prouver (2) ie $\operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$.
Il suffit de prouver $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im}(u+v)$ car l'autre inclusion est toujours vraie. Cela revient à prouver $\operatorname{Im} u \in \operatorname{Im}(u+v)$ et $\operatorname{Im} v \in \operatorname{Im}(u+v)$
Soit $x \in \operatorname{Im} u$ donc il existe $y \in E$ tq $x = u(y)$ on peut écrire $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \operatorname{Ker} u$ et $y_2 \in \operatorname{Ker} v$ car on a supposé $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$.
On a alors $x = u(y_1 + y_2) = u(y_2) = (u+v)(y_2) \in \operatorname{Im}(u+v)$.
On montre de la même manière que $\operatorname{Im} v \in \operatorname{Im}(u+v)$ cqfd.

Question 26. Injectivité, bijectivité d'un endomorphisme

1. RAS
2. $\Rightarrow$ (par contraposée) On suppose g non injective donc $\operatorname{Ker} g \neq \{0\}$ et on considère F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} g$ dans E et p le projecteur sur $\operatorname{Ker} g$ parallèlement à F alors p n'est pas la fonction nulle car $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} g \neq \{0\}$ et $\varphi(p) = g \circ p = 0$ donc φ n'est pas injective cqfd.

   $\Leftarrow$ On suppose g injective. Soit $f \in \operatorname{Ker} \varphi$ alors $g \circ f = 0$ donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g = \{0\}$ donc $f = 0$ donc $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ donc φ est injective cqfd.

   Montrons que φ est surjective ssi g est surjective ce qui prouvera aussi l'équivalence pour la bijectivité.
   $\Rightarrow$ (par contraposée) On suppose g non surjective donc $\operatorname{Im} g \neq E$ donc $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{Im}(\varphi(f)) = \operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g \neq E$ ainsi l'application Id_E (d'image E) n'est pas dans $\operatorname{Im} \varphi$ donc φ n'est pas surjective. cqfd

   $\Leftarrow$ On suppose g surjective et on considère H supplémentaire de $\operatorname{Ker} g$.
   On sait qu'il existe une bijection entre h et $\operatorname{Im} g = E$, on note u sa bijection réciproque.

Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ (on veut montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $h = g \circ f = \varphi(f)$).
On définit $f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & u^{-1} \circ h(x) \end{array}$ qui est clairement un endomorphisme de E (attention $f \neq u^{-1} \circ h$ car pas le même espace d'arrivée.
$\varphi(f) = g \circ f = g \circ u^{-1} \circ h = u \circ u^{-1} \circ h = h$ donc φ est surjective.

10 Matrices

Question 27. Calcul de rang

★ $A = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & 1 \\ 2 & 0 & 3-a \end{pmatrix}$ on veut échelonner en lignes par la droite (plutôt que par la gauche habituellement) en faisant disparaitre le 1 pour cela il faut faire une disjonction de cas :

- On suppose $a = 3$ alors $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qi est de rang 2 ($C_2 = -C_3$)
- On suppose $a \neq 3$.

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & 1 \\ 2 & 0 & 3-a \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 5-a & (2-a)(a-3) & 0 \\ 2 & 0 & 3-a \end{pmatrix}}_{B} \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow (a-3)L_2 + L_3}$$

  - Si $a = 1$ alors $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2
  - Si $a = 2$ alors $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2
  - Si $a \notin \{1, 2, 3\}$ alors le rang vaut 3 (B triangulaire à coefficients diagonaux non nuls).

★ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$

- Si $a = b = c$ le rang vaut 1
- Si deux seulement sur les trois sont égaux alors il y a deux colonnes égales et deux colonnes non colinéaires donc le rang vaut 2.
- On suppose que a, b et c sont distincts 2 à 2.

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{pmatrix} && {\scriptstyle C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \atop C_3 \leftarrow C_3 - C_1} \\ (b-a \neq 0, c-a \neq 0) \quad &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{pmatrix} && {\scriptstyle C_2 \leftarrow C_2/(b-a) \atop C_3 \leftarrow C_3/(c-a)} \\ &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & c-b \end{pmatrix} && {\scriptstyle C_3 \leftarrow C_3 - C_2} \quad = 3 \quad \text{car } c-b \neq 0 \end{aligned}$$

On peut joliment résumer en $\operatorname{rg} B = \operatorname{card}\{a, b, c\}$.

★ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$

Même disjontion de cas :

- Si $a = b = c$ le rang vaut 1 (3 colonnes égales et non nulles)
- Si deux seulement sur les trois sont égaux alors il y a deux colonnes égales et deux colonnes non colinéaires donc le rang vaut 2.
- On suppose que a, b et c sont distincts 2 à 2.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} \quad \begin{smallmatrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{smallmatrix} \\
(a-b \neq 0,\ a-c \neq 0) \quad &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix} \quad \begin{smallmatrix} C_2 \leftarrow C_2/(a-b) \\ C_3 \leftarrow C_3/(a-c) \end{smallmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle C_3 \leftarrow C_3 - C_2} \quad = 3 \quad \text{car } b-c \neq 0
\end{aligned}$$

On peut de nouveau résumer en $\operatorname{rg} C = \operatorname{card}\{a, b, c\}$.

Question 28. Inversibilité

1. $X^T A X$ est une matrice 1x1 donc symétrique (que l'on confond habituellement avec son unique coefficient)
   donc $(X^T A X)^T = X^T A X$ or $(X^T A X)^T = X^T A^T X = X^T(-A)X = -X^T A X$ donc $-X^T A X = X^T A X$ donc $X^T A X = 0$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(A+I)X = 0$ donc $X^T(AX + X) = 0$ donc $X^T X = 0$ or $X^T X$ est le réel (avec la confusion évoquée) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ donc (réels positifs) $x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
   $(A+I)X = 0 \Rightarrow X = 0$ donc $A + I$ est inversible (caractérisation moins utilisée).

11 Probabilités

Question 29. Couple de varaiables aléatoires

1. $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
   Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ ($= X(\Omega) \times Y(\Omega)$).
   $$P(X = i, Y = j) = P(Y = j \mid X = i)P(X = i) = \begin{cases} \dfrac{1}{i} \times \dfrac{1}{n} \text{ si } j \leqslant i \\ 0 \text{ si } j > i \\ . \end{cases}$$
   Remarque : il peut être difficile (pas ici) et périlleux (ici) pour la suite de chercher à déterminer exactement $(X, Y)(\Omega)$, on détermine plutôt $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ qui contient le précédent.
2. $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Formule des lois marginales (ou FPT avec SCE associé à X) :
   $$\forall j \in [\![1, n]\!]\,,\ P(Y = j) = \sum_{i=1}^{n} P(X = i, Y = j) \underset{\text{danger}}{=} 0 + \sum_{i=j}^{n} P(X = i, Y = j) = \frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}$$

3. Sachant $Y=j$ les seules valeurs possibles pour X sont entre j et n.

$$\forall i \in [\![j,n]\!]\,,\ P(X=i\,|\,Y=j)=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(Y=j)}=\frac{1}{n-j+1}$$

Ainsi la loi de X sachant $Y=j$ est la loi uniforme sur $[\![j,n]\!]$ ($\mathcal{U}([\![j,n]\!])$ pas de notation dédiée pour loi conditionnelle de X).

Question 30. Loi d'un minimum On notera M plutôt que m.

(a) $(M \geqslant k)=\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \geqslant k)$ (bien comprendre pourquoi ...)
d'où par indépendance et lois uniformes $P(M \geqslant k)=\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^n$.

(b) $M(\Omega)=[\![1,n]\!]$
Soit $k \in [\![1,n]\!]$, $P(M=k)=P(M \geqslant k)-P(M>k)=P(M \geqslant k)-P(M \geqslant k+1)$.

Pour $k<n$ (pour avoir $k+1 \leqslant n$) on a donc

$$P(M=k)=\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^n-\left(\frac{n-k}{n}\right)^n$$

et la formule est valable pour $k=n$ (1=1-0).

(c) $\underbrace{(\exists i \in [\![1,n]\!]:\ X_i=1)}_{A}=(M=1)$ (l'un au moins vaut 1 équivaut au minimum qui vaut vaut 1)
donc $P(A)=\left(\frac{n-1+1}{n}\right)^n-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=1-(1-\frac{1}{n})^n$
il s'agit donc de prouver que $\frac{1}{e} \geqslant (1-\frac{1}{n})^n$ (qui tend vers $\frac{1}{e}$ ...).
or $\ln\left((1-\frac{1}{n})^n\right)=n\ln(1-\frac{1}{n}) \leqslant n \times (-\frac{1}{n})=-1$ (cours : inégalité de convexité)
on conclut par passage à l'exponentielle croissante (sur $\mathbb{R}$).

12 Intégration

Question 31. Intégrales de Wallis (*grand classique à bien maîtriser*)

1. $I_0=\frac{\pi}{2}, I_1=1$
changement de variable qui change sin en cos : $u=\frac{\pi}{2}-t$
2. $I_{n+1}-I_n$ sous forme d'intégrale puis positivité de l'intégrale donne $I_{n+1}-I_n \leqslant 0$, donc décroissante et minorée par 0 (positivité bis) donc CV par TLM.

   5/2 : on peut montrer (à faire) que la limite est 0 par CVD.
3. en décomposant $sin^{n+2}=\sin\times\sin^{n+1}$ et en dérivant $\sin^{n+1}$ on a – avec $\cos^2=1-\sin^2$ – une relation entre I_{n+2} et I_n qui permet de conclure.
4. Par récurrence avec question précédente mais directement on obtient que la suite est constante en multipliant la relation précédente par $(n+2)I_{n+1}$.
5. Il s'agit en fait de montrer que $I_{n+1} \sim I_n$ (souvent demandé mais à savoir).
Par décroissance $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ et par la question 3, $I_{n+2} \sim I_n$ donc par théorème d'encadrement (version équivalent) on a $I_{n+1} \sim I_n$.

   La question 4 donne alors $nI_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$ donc $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Question 32. Taylor avec reste intégral
(HP PCSI, au programme en PSI)

1. IPP dans reste intégral ... (insister)
2. On applique avec cosinus qui est C $^3 sur[0,\pi_{\overline{2]}}$ avec 0 et x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ (les trees de la siomme sont ceux de la partie réguière du $\mathrm{DL}_2(0)$ de cos)

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\cos^{(3)}(t)\mathrm{d}t = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\sin(t)\mathrm{d}t \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$$

Par positivité avec $0 \leqslant x$ (bornes dans le « bon sens »). ON conclut pour l'autre inégalité en l'appliquant de la même façon mais à l'ordre 4 (avec cos $\mathcal{C}^5$).

13 Espaces préhilbertiens réels

Question 33. Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
(application bien définie (il pourra y avoir plus tard des pb de séries ou d'intégrales généralisées)

– $\mathrm{tr}((A^\top B) = \mathrm{tr}((A^{)\top}) = \mathrm{tr}(B^\top A)$ donc l'application est *symétrique.*
– linéaire à droite (à faire) donc *bilinéaire* car symétrique.
– $[A^\top A]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{k,i}a_{k,i}}_{\geqslant 0} \geqslant 0$ donc $\mathrm{tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^{n}[A^\top A]_{i,i} \geqslant 0$ (*positivité*)
– Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\mathrm{tr}(A^\top A) = 0$ donc $\sum_{1 \leqslant i,k \leqslant} (a_{k,i})^2 = 0$ donc (somme nulle de termes positifs donc les termes sont nuls) les $a_{i,k}$ sont tous nuls donc $A = 0$ donc (avec positivité) l'application est *définie positive.*

Question 34. Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. —$(\, x \mid y \,) \mid \leqslant ||x||_times||y||$
ou $(\, x \mid y \,)^2 \leqslant (\, x \mid x \,)\,(\, y \mid y \,)$ Cours pour la preuve par positivité d'un trinôme du second degré donc discriminant négatif ...

2. En considérant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}([0,1])$: $(\, f \mid g \,) = \displaystyle\int_0^1 fg$ alors d'après CS avec g la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1]), \quad \left(\int_0^1 f\right)^2 = \left(\int_0^1 fg\right)^2 = (\, f \mid g \,)^2 \leqslant (\, f \mid f \,)^2 \times \underbrace{(\, g \mid g \,)^2}_{=1} = \int_0^1 f^2$$

3. Égalité dans CS ssi les vecteurs sont colinéaires (ie forment une famille liée). Donc égalité dans 2. si et seulement si f et g sont liées si et seulement si f est constante sur $[0,1]$.

14 Séries numériques

Question 35. Série géométrique

1. – Si $|q| \geqslant 1$ c'est une divergence grossière
   – Si $|q| < 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}$.

2. $|r^n \cos(n\theta)| = |r^n \cos(n\theta)| \leqslant r^n$ donc ACV par comparaison puis calcul (convergence possible aussi) par partie réelle et partie imaginaire d'une série géométrique.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1 - r\cos(\theta)}{1 + r^2 - 2r\cos\theta} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sin(n\theta) = \frac{r\sin(\theta)}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}$$

3.

Question 36. Comparaison des séries à termes positifs

1. Cours, l'idée est qu'apcr $\frac{1}{2}u_n \leqslant v_n \leqslant 2u_n$ (par exemple).
2. $\ln(un) \to -\infty$ donc $u_n = e^{\ln(u_n)} \to 0$.
3. d'après la question précédente $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (=o$\left(\frac{1}{n^2}\right)$ même) donc $\sum u_n$ est ACV donc CV.