

Programme de colle n° 7 10 nov – 14 nov

RÉDUCTION

Éléments propres

- Éléments propres d'un endomorphisme, caractérisation des valeurs propres, cas de la dimension finie.
- Éléments propres d'une matrice carrée, caractérisation des valeurs propres, spectre d'une matrice triangulaire
- Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et de ses matrices, correspondances vectorielle/matricielle.
- Stabilité des sous espaces propres $E_\lambda(u)$ par v si v commute avec u .
- Liberté d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes, les sous-espaces propres sont en somme directe.
- Polynômes d'endomorphisme et de matrices carrées :
Si $u(x) = \lambda x$ alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Si P est un polynôme annulateur de u alors $\text{Sp}(u) \subset \text{Rac}(P)$.

Polynôme caractéristique

- Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique .
 $\chi_A = X^n - (\text{tr } A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$.
Cas des matrices triangulaires ou triangulaires par blocs.
- $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \text{Rac}_{\mathbb{K}}(\chi_A)$, spectre complexe d'une matrice réelle.
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme (E de dim finie), lien avec spectre. Si F stable par u alors χ_{u_F} divise χ_u .
- **multiplicité d'une valeur propre** , $1 \leq m_\lambda \leq \dim E_\lambda(u)$, cas de la valeur propre simple.
(On a utilisé la convention $m_\mu = 0 \Leftrightarrow \mu \notin \text{Sp}(u)$).
Cas de la matrice réelle vue comme matrice complexe :
 $m_\lambda = m_{\bar{\lambda}}$, $\dim E_\lambda(u) = \dim E_{\bar{\lambda}}(u)$.
Si χ_u scindé (cf u trigonalisable) avec $\chi_u = \prod_{i=1}^n (X - \mu_i) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$
alors

$$\text{tr } u = \sum_{i=1}^n \mu_i = \sum_{i=1}^p m_{\lambda_i} \lambda_i, \quad \det u = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{m_{\lambda_i}}$$

Théorème de Cayley-Hamilton.

Diagonalisation

(E $\mathbb{K}$ -ev de dim finie n)

- Diagonalisabilité des endomorphismes et des matrices carrées, lien entre les deux.

Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.

Conditions Nécessaires et Suffisantes de diagonalisabilité :

Les propositions suivantes sont équivalentes

- $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable .
- Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u .
- E est somme (directe) des sous-espaces propres de u .
- $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = n$
- χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.
- u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples .
- $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u .

Traductions matricielles en remplaçant u, E par $A, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Condition **Suffisante** de diagonalisabilité :

Si u ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ alors u (A) est diagonalisable. Cela équivaut χ_u (χ_A) scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.

Trigonalisation

- Trigonalisation des endomorphismes et des matrices carrées.
Lien entre les deux.
- (Retour) Si trigonalisable, expression de la trace et du déterminant à l'aide des valeurs propres comptées avec multiplicité.
- u ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
- Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable, cas d'une matrice réelle vue comme matrice complexe.

Programme officiel :

La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

RÉVISIONS DÉNOMBREMENT

ENSEMBLES DÉNOMBRABLES, FAMILLES SOMMABLES

« Pour bien planter le décor »

Programme officiel : Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

ESPACES PROBABILISÉS (PAS DE VA)

- Univers Ω d'une expérience aléatoire, tribu $\mathcal{A}$ des événements.
- Dualité probabiliste/ensembliste des événements et des opérations sur les événements,
notamment $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$.
- Distributivité, lois de Morgan.
- Probabilité P sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, σ -additivité.
Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Événement presque sûr, événement négligeable, système quasi-complet d'événements.

- Théorème de la limite monotone : continuité croissante, continuité décroissante.
- Limites de $P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$ et $P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$.
- Sous-additivité :
$$P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \sum_{k=0}^n P(A_k), \quad P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$
- Caractérisation d'une probabilité sur un univers dénombrable Ω par sa distribution de probabilité $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ ($\sim$ HP a priori cas fini au programme)
cas fini : probabilité uniforme et modélisation d'une expérience (choix de Ω avec issues équiprobables).
- Probabilités conditionnelles. P_B est une probabilité.
- Convention $P_B(A)P(B) = 0$ ($= P(A \cap B)$) lorsque $P(B) = 0$.
- Formule des probabilités composées (*sans hypothèse particulière avec la convention*).
- Formule des probabilités totales (*idem*) avec un système complet d'événements ou un système quasi-complet d'événements.
- Formule de Bayes.
- Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle de n événements (vu indépendance mutuelle d'une suite événements (HP)).
- Lemme des coalitions pour les événements.