PSI – LMB

Programme de colle n° 10 1er déc – 5 déc

Espaces vectoriels normés

Normes

Bien définie sur E à valeurs dans R.
Hypothèses de *positivité, séparation, homogénéité, inégalité triangulaire.*
Norme associée à un produit scalaire (rappels élémentaires), distance associée à une norme.
Normes usuelles $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ (et tout ev de dimension n avec base associée) et $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Programme : L'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ *pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. peut être directement utilisée.*

Boule ouverte, fermée, sphère (voisinage évoqué), boule et sphère unité.
Parties convexes, convexité des boules.
Partie bornée, fonction bornée, suite bornée, norme de la convergence uniforme $||\cdot||_\infty$ sur des espaces vectoriels $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ de fonctions bornées sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Suites d'éléments dans un espace vectoriel normé

Convergence, divergence, unicité de la limite, opérations sur les limites.
Toute suite convergente est bornée.
Convergence des suites extraites d'une suite convergente.
$u_n \to \ell$ si et seulement si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$.

Topologie

Point intérieur à une partie ($\overset{\circ}{A}$ HP)
Ouverts, exemples des boules ouvertes, stabilité par réunion quelconque et par intersection finie.
Fermés, **caractérisation séquentielle des fermés** , exemples des boules fermées et des sphères. stabilité par intersection quelconque et par union finie.
Point adhérent à une partie, adhérence, **caractérisation séquentielle de l'adhérence**.
Densité

Programme : *A fermée si et seulement si $\overline{A} = A$ est HP mais doit savoir être prouvé.*

Comparaison de normes

Domination d'une norme par une autre (terme a priori HP).
Normes équivalentes, transitivité.
Invariance du caractère borné, de la convergence et de la limite d'une suite convergente pour deux normes équivalentes.
Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.

Équivalence des normes en dimension finie (cas des normes usuelles sur espace vectoriel de dim finie avec base associée).
La convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses suites coordonnées dans une base et en cas de convergence les coordonnées de la limite sont les limites des coordonnées.
Invariants topologiques pour deux normes équivalentes.

Limites et continuité

Les fonctions sont toutes définies de $A \subset E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé dans F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé .

Limites

Limite de f en $a \in \overline{A}$, caractérisation séquentielle, unicité de la limite.
Opérations sur les limites, cas particuliers avec fonctions scalaires.
Limites et inégalités pour fonctions réelles, cas particulier avec une variable réelle.
Invariance par changement pour norme équivalente.

Continuité

Continuité en un point $a \in A$, caractérisation séquentielle de la continuité en un point.
Continuité sur une partie A, opérations sur les fonctions continues, structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
Fonctions lipschtiziennes, continuité des fonctions lipschitziennes.
L'application norme est 1-lipschitzienne.
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.
Cas particuliers (f à valeurs dans $\mathbb{R}$) des ensembles définis par $f(x) > 0$, $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ avec f continue.

Dimension finie

Applications coordonnées d'une application à valeurs F de dim finie de base donnée.
f admet une limite en $a \in \overline{A}$ ou est continue en $a \in A$ si et seulement si ses applications coordonnées également.
Théorème des bornes atteintes.
Applications linéaires : elles sont toutes continues sur E de dimension finie.
Vu mais HP : Sur E de dimension infinie, une application linéaire est continue ssi elle est lipschitzienne.
Cas particulier des produits matriciels $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ et des applications coordonnées $\sum x_i e_i \mapsto x_k$.

Applications polynomiales : définition sur $\mathbb{K}^n$, sur E de dimension finie.
Toute application polynomiale est continue

HP : l'application déterminant est polynomiale sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Applications multinéaires (ou p-linéaires) : continuité sur un produit d'espaces vectoriels de dimension finie.
Exemple du produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$.
Exemple de l'application déterminant sur E^n (dans une base), sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Révisions sur les fonctions réelles continues d'une variable réelle.