PSI – LMB

Programme de colle n^o 11 8 déc – 12 déc

Limites et continuité

Les fonctions sont toutes définies de $A \subset E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé dans F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé .

Limites

Limite de f en $a \in \overline{A}$, caractérisation séquentielle, unicité de la limite.
Opérations sur les limites, cas particuliers avec fonctions scalaires.
Limites et inégalités pour fonctions réelles, cas particulier avec une variable réelle.
Invariance par changement pour norme équivalente.

Continuité

Continuité en un point $a \in A$, caractérisation séquentielle de la continuité en un point.
Continuité sur une partie A, opérations sur les fonctions continues, structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
Fonctions lipschtiziennes, continuité des fonctions lipschitziennes.
L'application norme est 1-lipschitzienne.
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.
Cas particuliers (f à valeurs dans $\mathbb{R}$) des ensembles définis par $f(x) > 0$, $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ avec f continue.

Dimension finie

Applications coordonnées d'une application à valeurs F de dim finie de base donnée.
f admet une limite en $a \in \overline{A}$ ou est continue en $a \in A$ si et seulement si ses applications coordonnées également.
Théorème des bornes atteintes.
Applications linéaires : elles sont toutes continues sur E de dimension finie.
Vu mais HP : Sur E de dimension infinie, une application linéaire est continue ssi elle est lipschitzienne.
Cas particulier des produits matriciels $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ et des applications coordonnées $\sum x_i e_i \mapsto x_k$.

Applications polynomiales : définition sur $\mathbb{K}^n$, sur E de dimension finie.
Toute application polynomiale est continue

HP : l'application déterminant est polynomiale sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Applications multinéaires (ou p-linéaires) : continuité sur un produit d'espaces vectoriels de dimension finie.
Exemple du produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$.
Exemple de l'application déterminant sur E^n (dans une base), sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Révisions sur les fonctions réelles continues d'une variable réelle.

TSVP

Suites et séries de fonctions

Fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Modes de convergence des suites de fonctions

Convergence simple d'une suite de fonctions, limite simple. Convergence uniforme, limite uniforme. On utilisera la notation $\|f_n\|_\infty^I$ si nécessaire. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
Norme de la convergence uniforme sur les espaces de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

Rem : Concernant l'hypothèse de CVU sur I, en pratique, elle peut être affaiblie en CVU sur un ensemble d'intervalles qui recouvrent I.

Continuité, intégration sur un segment, dérivabilité, classes $\mathcal{C}^p$ et $\mathcal{C}^\infty$ d'une limite de suite de fonctions.

Séries de fonctions

Définition, convergence simple, somme de série de fonctions et domaine de définition, suite des restes d'une série de fonctions définie sur le même domaine (suite des sommes partielles plus anecdotique).

Convergence uniforme, caractérisation par CVS et CVU de (R_n) vers la fonction nulle.
Convergence normale, majoration uniforme de $|u_n(x)|$ pour établir la convergence normale de $\sum u_n$.

$$\begin{tikzcd}
 & \forall\, x \in I, \sum u_n(x) \text{ CVA (séries num.)} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{(série fns) } \sum u_n \text{ CVN sur } I \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \sum u_n \text{ CVS sur } I \text{ (série fns)} \\
 & \text{(série fns) } \sum u_n \text{ CVU sur } I \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Rem : Concernant l'hypothèse de CVU sur I, en pratique, elle peut être affaiblie en CVU sur un ensemble d'intervalles qui recouvrent I (hormis théorème de la double limite).

Théorème de la double limite (juste sur série...)
Continuité, intégration (interversion série-intégrale) sur un segment, dérivation (terme à terme), classes $\mathcal{C}^p$ et $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série de fonctions.

Nota Bene :

L'étude des suites et séries de fonctions s'accompagnent de révisions du chapitre *Séries numériques* comme :

- séries géométriques et exponentielles
- théorèmes de comparaison
- lien suite-série
- règle de d'Alembert
- **théorème des séries alternées**
- **méthode de comparaison série-intégrale**