PSI – LMB

Programme de colle n° 12 5 janv – 9 janv

Suites et séries de fonctions

Fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Modes de convergence des suites de fonctions

Convergence simple d'une suite de fonctions, limite simple. Convergence uniforme, limite uniforme. On utilisera la notation $\|f_n\|_\infty^I$ si nécessaire. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
Norme de la convergence uniforme sur les espaces de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

Rem : Concernant l'hypothèse de CVU sur I, en pratique, elle peut être affaiblie en CVU sur un ensemble d'intervalles qui recouvrent I.

Continuité, intégration sur un segment, dérivabilité, classes $\mathcal{C}^p$ et $\mathcal{C}^\infty$ d'une limite de suite de fonctions.

Séries de fonctions

Définition, convergence simple, somme de série de fonctions et domaine de définition, suite des restes d'une série de fonctions définie sur le même domaine (suite des sommes partielles plus anecdotique).

Convergence uniforme, caractérisation par CVS et CVU de (R_n) vers la fonction nulle.
Convergence normale, majoration uniforme de $|u_n(x)|$ pour établir la convergence normale de $\sum u_n$.

$$\begin{tikzcd}
 & \forall\, x \in I, \sum u_n(x) \text{ CVA (séries num.)} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{(série fns) } \sum u_n \text{ CVN sur } I \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \sum u_n \text{ CVS sur } I \text{ (série fns)} \\
 & \text{(série fns) } \sum u_n \text{ CVU sur } I \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Rem : Concernant l'hypothèse de CVU sur I, en pratique, elle peut être affaiblie en CVU sur un ensemble d'intervalles qui recouvrent I (hormis théorème de la double limite).

Théorème de la double limite (juste sur série...)
Continuité, intégration (interversion série-intégrale) sur un segment, dérivation (terme à terme), classes $\mathcal{C}^p$ et $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série de fonctions.

Nota Bene :

L'étude des suites et séries de fonctions s'accompagnent de révisions du chapitre *Séries numériques* comme :

- séries géométriques et exponentielles
- théorèmes de comparaison
- lien suite-série
- règle de d'Alembert
- **théorème des séries alternées**
- **méthode de comparaison série-intégrale**

TSVP

Séries entières

Notations (abusives) $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n x^n$ pour des séries entières de variable complexe z ou réelle x.

Rayon de convergence

Lemme d'Abel, rayon de convergence R, notation autorisée $R(\sum a_n z^n)$.
La série (numérique) $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$ et elle diverge grossièrement si $|z| > R$.
Disque ouvert de convergence $D(0, R)$, intervalle ouvert de convergence $I =]-R, R[$.
Inégalités sur le rayon de convergence en fonction de la nature de $\sum a_n z_0^n$ et/ou propriétés de $(a_n z_0^n)$.
Règles de comparaison :

- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$, en particulier si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$.
- Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$, en particulier si $a_n \sim b_n$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$.
Règle de d'Alembert pour les séries entières : *la limite du rapport* $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *peut être utilisée directement.*
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières (inégalités et cas d'égalité).

Régularité de la somme d'une série entière

On considère maintenant (or continuité) des séries entières $\sum a_n x^n$ *de la variable réelle* x.
Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence.
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.

$R(\sum a_n x^n) = R(\sum n a_n x^n)$.
Série entière dérivée, série entière primitive, rayon de convergence R inchangé.
Obtention de la dérivée/d'une primitive de la somme de $\sum a_n x_n$ sur $I =]-R, R[$ par dérivation/primitivation terme à terme.

Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme f d'une série entière sur $]-R, R[$ et obtention des dérivées successives par dérivations successives terme à terme, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
Interversion série/intégrale sur un segment de $]-R, R[$.

Développements en série entière

Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.
Unicité du développement en série entière . DSE des fonctions paire ou impaire.
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
Formule de Taylor avec reste intégral.
Inégalité de Taylor-Lagrange.
Combinaisons linéaires et produits de développements en série entière .
DSE à l'aide d'une équation différentielle.
DSE usuels.