PSI – LMB

Programme de colle n° 14 19 janv – 23 janv

Intégrales généralisées (ou impropres)

I désigne un intervalle semi-ouvert ou ouvert (au moins une « borne ouverte ») de $\mathbb{R}$ de bornes a et b avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Fonctions continues par morceaux

Fonctions continues par morceaux sur un segment, intégrale de fonction continue par morceaux sur un segment, propriétés.
Fonctions continues par morceaux sur un intervalle de $\mathbb{R}$, notation $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$, stabilité par combinaison linéaire et par produit.

Intégrales généralisées

- Généralisation de l'intégrale sur $I = [a,b[$ d'une fonction continue par morceaux sur I, convergence, divergence.
  Caractère local (en b^-) de la nature de l'intégrale.
  Terminologie : convergence ou convergence en b^-
  Si f continue sur $[a,b]$, $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ est convergente et $\displaystyle\int_{[a,b[} f = \int_{[a,b]} f$, notation $\displaystyle\int_a^b f$.
  Prolongement par continuité et intégrale faussement impropre.
- Généralisation de l'intégrale sur $I =]a,b]$, transposition des résultats précédents.
- Généralisation de l'intégrale sur $I =]a,b[$,
  Terminologie : intégrale convergente ou convergente en a^+ et en b^-.
- Utilisation de primitives :
  Si f est *continue* sur I et F une primitive de f sur I . Alors
  $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si F admet des limites finies en les bornes « ouvertes » de I.
  Dans ce cas on a $$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = \begin{cases} \lim\limits_{b^-} F - F(a) & \text{si } I = [a,b[\\ F(b) - \lim\limits_{a^+} F & \text{si } I =]a,b] \\ \lim\limits_{b^-} F - \lim\limits_{a^+} F & \text{si } I =]a,b[\end{cases}$$

Propriétés des intégrales généralisées

On s'assure avant tout que les intégrales manipulées sont bien convergentes.
Relation de Chasles, linéarité, positivité, stricte positivité, croissance, cas des fonctions à valeurs complexes.

Cas des fonctions positives

Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$ et positive alors :
$\displaystyle\int_a^b f$ est convergente si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée.

Théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives :
Soit f et g continues par morceaux sur I, telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ alors : $\displaystyle\int_I g$ convergente $\Longrightarrow \displaystyle\int_I f$ convergente.
(et contraposée)

TSVP

Techniques de comparaison série-intégrale (HP à savoir reprouver) :

- $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ convergente $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n\geqslant n_0}\int_n^{n+1} f$ convergente (et contraposée)
- si f est positive alors $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ convergente $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{n\geqslant n_0}\int_n^{n+1} f$ convergente
- si f est positive et décroissante alors $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ convergente $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{n\geqslant n_0}\int_n^{n+1} f$ converge $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ convergente

Intégrales absolument convergentes et intégrabilité

Intégrales absolument convergentes, ACV $\Rightarrow$ CV, inégalité triangulaire, intégrales semi-convergentes.
Programme officiel : l'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme

Fonctions intégrables sur I, $L^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$.
Caractère local de l'intégrabilité (en la/les borne(s) ouverte(s) de I).
Terminologie : f intégrable sur $[a,b[$ ou intégrable en b^-.

Fonctions de références :
Intégrabilité en 0^+ de $t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ ssi $\alpha<1$.
Intégrabilité en a^+ de $t\mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ ssi $\alpha<1$.
Intégrabilité en b^- de $t\mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ ssi $\alpha<1$.
Intégrabilité en 0^+ de $t\mapsto \ln t$.
Intégrabilité en $+\infty$ de $t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ ssi $\alpha>1$.
Intégrabilité en $+\infty$ de $t\mapsto e^{at}$ ssi $a<0$.
f est intégrable en a^+ ssi $t\mapsto f(a+t)$ est intégrable en $0k$
f est intégrable en b^- ssi $t\mapsto f(b-t)$ est intégrable en 0^+

Théorème de comparaison :

- Si $f \underset{c}{=} \mathrm{O}(g)$, alors : g est intégrable en $c \Longrightarrow f$ est intégrable en c (et contraposée)
- Si $f \underset{c}{\sim} g$, alors : f est intégrable en $c \Longleftrightarrow g$ est intégrable en c.

Cas particulier $f \underset{c}{=} \mathrm{o}(g)$

Techniques de calculs d'une intégrale généralisée

Changement de variable : f *continue* sur $]a,b[$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une **bijection strictement croissante (décroissante) de classe $\mathcal{C}^1$**. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ ($\displaystyle\int_\beta^\alpha f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$) sont **de même nature et égales en cas de convergence**.
Programme officiel : On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.
Cas des fonctions paires ou impaires sur $]-a,a[$.

Intégration par parties :
Soit f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si fg admet une limite finie en chaque « borne ouverte » de I alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature, et, lorsqu'elles convergent, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

(Si une seule borne impropre, éventuellement faire l'IPP sur l'intégrale partielle puis faire un passage à la limite).
Programme officiel : Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.