Programme de colle n° 15 26 janv – 30 janv

Intégrales généralisées (ou impropres)

I désigne un intervalle semi-ouvert ou ouvert (au moins une « borne ouverte ») de $\mathbb{R}$ de bornes a et b avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Fonctions continues par morceaux

Fonctions continues par morceaux sur un segment, intégrale de fonction cpm sur un segment, propriétés.
Fonctions continues par morceaux sur un intervalle de $\mathbb{R}$, notation $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, stabilité par combinaison linéaire et par produit.

Intégrales généralisées

- Généralisation de l'intégrale sur $I = [a, b[$ d'une fonction continue par morceaux sur I, convergence, divergence.
  Caractère local (en b^-) de la nature de l'intégrale.
  Terminologie : convergence ou convergence en b^-
  Si f continue sur $[a, b]$, $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ est convergente et $\displaystyle\int_{[a,b[} f = \int_{[a,b]} f$, notation $\displaystyle\int_a^b f$.
  Prolongement par continuité et intégrale faussement impropre.
- Généralisation de l'intégrale sur $I =]a, b]$, transposition des résultats précédents.
- Généralisation de l'intégrale sur $I =]a, b[$,
  Terminologie : intégrale convergente ou convergente en a^+ et en b^-.
- Utilisation de primitives :
  Si f est *continue* sur I et F une primitive de f sur I . Alors
  $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si F admet des limites finies en les bornes « ouvertes » de I.
  Dans ce cas on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = \begin{cases} \lim\limits_{b^-} F - F(a) & \text{si } I = [a, b[\\ F(b) - \lim\limits_{a^+} F & \text{si } I =]a, b] \\ \lim\limits_{b^-} F - \lim\limits_{a^+} F & \text{si } I =]a, b[\end{cases}$

Propriétés des intégrales généralisées

On s'assure avant tout que les intégrales manipulées sont bien convergentes.
Relation de Chasles, linéarité, positivité, stricte positivité, croissance, cas des fonctions à valeurs complexes.

Cas des fonctions positives

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ et positive alors :
$\displaystyle\int_a^b f$ est convergente si et seulement si $\displaystyle x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée.

Théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives :
Soit f et g cpm sur I, telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ alors : $\displaystyle\int_I g$ convergente $\Longrightarrow \displaystyle\int_I f$ convergente (et contraposée)
Techniques de comparaison série-intégrale (HP à savoir reprouver) :

- $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ convergente $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} \int_n^{n+1} f$ convergente (et contraposée)
- si f est positive alors $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ convergente $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} \int_n^{n+1} f$ convergente
- si f est positive et décroissante alors $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ convergente $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} \int_n^{n+1} f$ converge $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ convergente

Intégrales absolument convergentes et intégrabilité

Intégrales absolument convergentes, ACV $\Rightarrow$ CV, inégalité triangulaire, intégrales semi-convergentes.
Fonctions intégrables sur I, $L^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$.
Caractère local de l'intégrabilité (en la/les borne(s) ouverte(s) de I).
Terminologie : f intégrable sur $[a,b[$ ou intégrable en b^-.

Fonctions de références :
Intégrabilité en 0^+ de $t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ ssi $\alpha<1$.
Intégrabilité en a^+ de $t\mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ ssi $\alpha<1$.
Intégrabilité en b^- de $t\mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ ssi $\alpha<1$.
Intégrabilité en 0^+ de $t\mapsto \ln t$.
Intégrabilité en $+\infty$ de $t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ ssi $\alpha>1$.
Intégrabilité en $+\infty$ de $t\mapsto e^{at}$ ssi $a<0$.
f est intégrable en a^+ ssi $t\mapsto f(a+t)$ est intégrable en $0k$
f est intégrable en b^- ssi $t\mapsto f(b-t)$ est intégrable en 0^+

Théorème de comparaison :

- Si $f \underset{c}{=} \mathrm{O}(g)$, alors : g est intégrable en $c \Rightarrow f$ est intégrable en c (contraposée et cas particulier $f \underset{c}{=} \mathrm{o}(g)$)
- Si $f \underset{c}{\sim} g$, alors : f est intégrable en $c \iff g$ est intégrable en c.

Techniques de calculs d'une intégrale généralisée

Changement de variable : f *continue* sur $]a,b[$ et $\varphi :]\alpha\,,\beta[\,\to]a,b[$ une **bijection strictement croissante (décroissante) de classe $\mathcal{C}^1$**. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ ($\displaystyle\int_\beta^\alpha f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$) sont **de même nature et égales en cas de convergence**.
Programme officiel : On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.
Cas des fonctions paires ou impaires sur $]-a,a[$.

Intégration par parties :
Soit f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si fg admet une limite finie en chaque « borne ouverte » de I alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature, et, lorsqu'elles convergent, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

(Si une seule borne impropre, éventuellement faire l'IPP sur l'intégrale partielle puis faire un passage à la limite).
Programme officiel : Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Suites et séries de fonctions intégrables

Programme officiel : Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

- **Théorème de convergence dominée** :
  Si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $|f_n|\leqslant\varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)\mathrm{d}t$$

  Cas particulier où $f_n=\sum\limits_{k=0}^{n} u_n$ est une **somme partielle de série de fonctions** intégrables sur I.

  Dans ce cas, le résultat de la CVD s'écrit (intégration terme à terme) : $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I u_n(t)dt$.

TSVP 

- **Théorème d'intégration terme à terme** :
  Si une série $\sum f_n$ de fonctions intégrables sur I converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur I , et si la série $\sum \int_I |f_n(t)| \mathrm{d}t$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt$$

.

Intégrales à paramètre

Programme officiel : Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t .

- **Théorème de continuité**
  Soit f une fonction définie sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de $\mathbb{R}$ telle que :
  a) $\forall x \in A,\ t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
  b) $\forall t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
  c) **Hypothèse de domination :** Il existe une fonction φ *intégrable sur* I telle que
  $$\forall (x,t) \in A \times I\ ,\ \left|f(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$
  Alors la fonction $g\ :\ x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

  Le résultat de ce théorème et de celui de dérivation et ses extensions restent vrais si on suppose seulement que l'hypothèse de domination est vérifiée pour $(x,t) \in K \times I$, **pour tout segment** K inclus dans A (ou pour toute famille d'intervalles recouvrant tous ces segments ie recouvrant A.
- **Théorème de convergence dominée à paramètre continu**
  Soit f une fonction définie sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et a une borne de A tel que :
  a) $\forall x \in A,\ t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
  b) $\forall t \in I,\ \lim\limits_{x \to a} f(x,t) = \ell(t)$ finie, où ℓ est une fonction continue par morceaux sur I ;
  c) **Hypothèse de domination :** Il existe une fonction φ *intégrable sur* I telle que
  $$\forall (x,t) \in A \times I\ ,\ \left|f(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$
  Alors, pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I,
  la fonction ℓ est intégrable sur I et $\lim\limits_{x \to a} \left(\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \right) = \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre**
  Soit f une fonction définie sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de $\mathbb{R}$ tel que :
  a) $\forall x \in A,\ t \mapsto f(x,t)$ est *intégrable* sur I.
  b) $\forall t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.
  c) $\forall x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I .
  d) **Hypothèse de domination** : Il existe une fonction φ *intégrable sur* I telle que :
  $$\forall (x,t) \in A \times I\ ,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$
  Alors, la fonction $g\ :\ x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, et :
  $$\forall x \in A\ ,\ g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Extension à la classe $\mathcal{C}^n$ sous domination de $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ et intégrabilité des $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
Corollaire de la classe $\mathcal{C}^\infty$ avec domination de $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.