

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES (OU IMPROPRES)

I désigne un intervalle semi-ouvert ou ouvert (au moins une « borne ouverte ») de \mathbb{R} de bornes a et b avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Fonctions continues par morceaux

Fonctions continues par morceaux sur un segment, intégrale de fonction cpm sur un segment, propriétés.

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle de \mathbb{R} , notation $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, stabilité par combinaison linéaire et par produit.

Intégrales généralisées

- Généralisation de l'intégrale sur $I = [a, b[$ d'une fonction continue par morceaux sur I , convergence, divergence.

Caractère local (en b^-) de la nature de l'intégrale.

Terminologie : convergence ou convergence en b^-

Si f continue sur $[a, b]$, $\int_{[a,b]} f$ est convergente et $\int_{[a,b[} f = \int_{[a,b]} f$, notation $\int_a^b f$.

Prolongement par continuité et intégrale faussement impropre.

- Généralisation de l'intégrale sur $I =]a, b]$, transposition des résultats précédents.

- Généralisation de l'intégrale sur $I =]a, b[$,

Terminologie : intégrale convergente ou convergente en a^+ et en b^- .

- Utilisation de primitives :

Si f est continue sur I et F une primitive de f sur I . Alors

$\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si F admet des limites finies en les bornes « ouvertes » de I .

$$\text{Dans ce cas on a } \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = \begin{cases} \lim_{b^-} F - F(a) & \text{si } I = [a, b[\\ F(b) - \lim_{a^+} F & \text{si } I =]a, b] \\ \lim_{b^-} F - \lim_{a^+} F & \text{si } I =]a, b[\end{cases}$$

Propriétés des intégrales généralisées

On s'assure avant tout que les intégrales manipulées sont bien convergentes.

Relation de Chasles, linéarité, positivité, stricte positivité, croissance, cas des fonctions à valeurs complexes.

Cas des fonctions positives

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ et positive alors :

$\int_a^b f$ est convergente si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée.

Théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives :

Soit f et g cpm sur I , telles que $0 \leq f \leq g$ alors : $\int_I g$ convergente $\implies \int_I f$ convergente (et contraposée)

Techniques de comparaison série-intégrale (HP à savoir reprouver) :

- $\int_{n_0}^{+\infty} f$ convergente $\implies \sum_{n \geq n_0} \int_n^{n+1} f$ convergente (et contraposée)
- si f est positive alors $\int_{n_0}^{+\infty} f$ convergente $\iff \sum_{n \geq n_0} \int_n^{n+1} f$ convergente
- si f est positive et décroissante alors $\int_{n_0}^{+\infty} f$ convergente $\iff \sum_{n \geq n_0} \int_n^{n+1} f$ converge $\iff \sum_{n \geq n_0} f(n)$ convergente

Intégrales absolument convergentes et intégrabilité

Intégrales absolument convergentes, ACV \Rightarrow CV, inégalité triangulaire, intégrales semi-convergentes.

Fonctions intégrables sur I , $L^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

Caractère local de l'intégrabilité (en la/les borne(s) ouverte(s) de I).

Terminologie : f intégrable sur $[a, b[$ ou intégrable en b^- .

Fonctions de références :

Intégrabilité en 0^+ de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ ssi $\alpha < 1$.

Intégrabilité en a^+ de $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ ssi $\alpha < 1$.

Intégrabilité en b^- de $t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ ssi $\alpha < 1$.

Intégrabilité en 0^+ de $t \mapsto \ln t$.

Intégrabilité en $+\infty$ de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ ssi $\alpha > 1$.

Intégrabilité en $+\infty$ de $t \mapsto e^{at}$ ssi $a < 0$.

f est intégrable en a^+ ssi $t \mapsto f(a+t)$ est intégrable en 0^+

f est intégrable en b^- ssi $t \mapsto f(b-t)$ est intégrable en 0^+

Théorème de comparaison :

– Si $f = O_c(g)$, alors : g est intégrable en $c \Rightarrow f$ est intégrable en c (contraposée et cas particulier $f = o_c(g)$)

– Si $f \sim_c g$, alors : f est intégrable en $c \iff g$ est intégrable en c .

Techniques de calculs d'une intégrale généralisée

Changement de variable : f continue sur $]a, b[$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une **bijection strictement croissante** (décroissante) de classe \mathcal{C}^1 . Alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ ($\int_\beta^\alpha f(\varphi(u))\varphi'(u)du$) sont de même nature et égales en cas de convergence.

Programme officiel : On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.

Cas des fonctions paires ou impaires sur $] -a, a[$.

Intégration par parties :

Soit f et g de classe \mathcal{C}^1 sur I . Si fg admet une limite finie en chaque « borne ouverte » de I alors les intégrales

$\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature, et, lorsqu'elles convergent, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

(Si une seule borne impropre, éventuellement faire l'IPP sur l'intégrale partielle puis faire un passage à la limite).

Programme officiel : Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS INTÉGRABLES

Programme officiel : Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

– **Théorème de convergence dominée :**

Si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n , alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t)dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t)dt$$

Cas particulier où $f_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est une **somme partielle de série de fonctions** intégrables sur I .

Dans ce cas, le résultat de la CVD s'écrit (intégration terme à terme) : $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)dt$.

TSVP



– **Théorème d'intégration terme à terme :**

Si une série $\sum f_n$ de fonctions intégrables sur I converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur I , et si la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$$

INTÉGRALES À PARAMÈTRE

Programme officiel : Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t .

– **Théorème de continuité**

Soit f une fonction définie sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de \mathbb{R} telle que :

- a) $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- b) $\forall t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A ;
- c) **Hypothèse de domination :** Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

Le résultat de ce théorème et de celui de dérivation et ses extensions restent vrais si on suppose seulement que l'hypothèse de domination est vérifiée pour $(x, t) \in K \times I$, **pour tout segment** K inclus dans A (ou pour toute famille d'intervalles recouvrant tous ces segments ie recouvrant A).

– **Théorème de convergence dominée à paramètre continu**

Soit f une fonction définie sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de \mathbb{R} et a une borne de A tel que :

- a) $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- b) $\forall t \in I, \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = \ell(t)$ finie, où ℓ est une fonction continue par morceaux sur I ;
- c) **Hypothèse de domination :** Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors, pour tout $x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I ,

la fonction ℓ est intégrable sur I et $\lim_{x \rightarrow a} \left(\int_I f(x, t) dt \right) = \int_I \ell(t) dt$.

– **Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre**

Soit f une fonction définie sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de \mathbb{R} tel que :

- a) $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I .
- b) $\forall t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A .
- c) $\forall x \in A$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- d) **Hypothèse de domination :** Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x, t) \in A \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors, la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est bien définie, de classe \mathcal{C}^1 sur A , et :

$$\forall x \in A, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Extension à la classe \mathcal{C}^n sous domination de $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$ et intégrabilité des $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ pour $0 \leq k \leq n-1$.
Corollaire de la classe \mathcal{C}^∞ avec domination de $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.