Programme de colle n° 17 9 fév – 13 fév

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

Formes bilinéaires symétriques définies positives. On a noté $\langle x , y \rangle$.
Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens.
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ confondu avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($X^\top Y$), sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($\mathrm{tr}(A^\top B)$,
produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a,b])$.
Norme (euclidienne) associée à un produit scalaire. Identités remarquables ($||u \pm v||^2$ et identité de polarisation).
Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.
Inégalité triangulaire et cas d'égalité.
Une norme associée à un produit scalaire est bien une norme (euclidienne).

Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore. Orthogonal $A^\perp$ d'une partie A, d'un sous-espace vectoriel .
$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. Propriétés de l'orthogonal.
$x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!] ,\ \langle e_i , x \rangle = 0$.
Sous-espaces orthogonaux. Familles orthogonales, orthonormales (ou orthonormées).
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Bases orthonormées. Existence dans un sous-espace vectoriel de dim finie.
Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.
Théorème de représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.

Projection orthogonale

Si F sous-espace vectoriel de dim finie de E (epr) alors $E = F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$, supplémentaire orthogonal.
Cas euclidien : $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$, supplémentaire orthogonal d'une droite et d'un hyperplan, vecteur normal à un hyperplan.
Partition/concaténation de bases orthonormées , théorème de la base orthonormée incompléte.
Projection orthogonale p_F sur un sous-espace vectoriel F de dimension finie et $p_{F^\top}$ sur $F^\perp$, $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{Id}_E$.
Symétrie orthogonale s_F par rapport à F de dimension finie, $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E - 2p_{F^\perp}$.

Détermination de $p_F(x)$ par résolution d'un système :
Si $F = \mathrm{Vect}(e, \dots, e_p)$ alors $p_F(x)$ est l'unique vecteur $y = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in F$ vérifiant : $\forall i \in [\![1, p]\!] ,\ \langle x - y , e_i \rangle = 0$.

Détermination de $p_F(x)$ par une base orthonormée de F :
Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F alors $p_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle e_i , x \rangle e_i$.

Cas d'une base orthogonale de F, projection orthogonale sur $F = \mathrm{Vect}(u)$: $p_F(x) = \dfrac{\langle u , x \rangle}{||u||^2} u$.

Projection orthogonale sur un hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$: $p_H(x) = x - \dfrac{\langle u , x \rangle}{||u||^2} u$.

Distance (euclidienne) associée au produit scalaire.
Distance $d(x, A)$ d'un vecteur x à une partie non vide A.
Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie.
Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F, existence d'un minimum.
Calculs pratiques de distance suivant la démarche :

$$\begin{aligned}
d(x, F)^2 = ||x - p_F(x)||^2 = ||x||^2 - ||p_F(x)||^2 &= ||x||^2 - \sum_{i=1}^{p} \langle e_i , x \rangle^2 && \text{quand } (e_1, \dots, e_p) \text{ est une BON de } F \\
&= ||p_{F^\top}(x)||^2 && \text{utile si } F^\perp \text{ de dimension inférieure à } F \\
&= \langle x - p_F(x) , x - p_F(x) \rangle = \langle x , x - p_F(x) \rangle && \text{quand } p_F(x) \text{ obtenu par un système}
\end{aligned}$$

Distance à un hyperplan $H = \mathrm{Vect}(u)^\perp$: $d(x, H) = \dfrac{|\langle u , x \rangle|}{||u||}$