

## Programme de colle n° 18      16 fév – 20 fév

### ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

#### Produit scalaire

Formes bilinéaires symétriques définies positives. On a noté  $\langle x, y \rangle$ .

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens.

Produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$  confondu avec  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  ( $X^\top Y$ ), sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ( $\text{tr}(A^\top B)$ ), produit scalaire usuel sur  $\mathcal{C}([a, b])$ .

Norme (euclidienne) associée à un produit scalaire. Identités remarquables ( $\|u \pm v\|^2$  et identité de polarisation).

Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.

Inégalité triangulaire et cas d'égalité.

Une norme associée à un produit scalaire est bien une norme (euclidienne).

#### Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore. Orthogonal  $A^\perp$  d'une partie  $A$ , d'un sous-espace vectoriel.  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Propriétés de l'orthogonal.

$x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle e_i, x \rangle = 0$ .

Sous-espaces orthogonaux. Familles orthogonales, orthonormales (ou orthonormées).

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Bases orthonormées. Existence dans un sous-espace vectoriel de dim finie.

Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.

Théorème de représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.

#### Projection orthogonale

Si  $F$  sous-espace vectoriel de dim finie de  $E$  (epr) alors  $E = F \oplus F^\perp$  et  $(F^\perp)^\perp = F$ , supplémentaire orthogonal. Cas euclidien :  $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ , supplémentaire orthogonal d'une droite et d'un hyperplan, vecteur normal à un hyperplan.

Partition/concaténation de bases orthonormées, théorème de la base orthonormée incomplète.

Projection orthogonale  $p_F$  sur un sous-espace vectoriel  $F$  de dimension finie et  $p_{F^\perp}$  sur  $F^\perp$ ,  $p_F + p_{F^\perp} = \text{Id}_E$ .

Symétrie orthogonale  $s_F$  par rapport à  $F$  de dimension finie,  $s_F = 2p_F - \text{Id}_E = \text{Id}_E - 2p_{F^\perp}$ .

Détermination de  $p_F(x)$  par résolution d'un système :

Si  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$  alors  $p_F(x)$  est l'unique vecteur  $y = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \in F$  vérifiant :  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle x - y, e_i \rangle = 0$ .

Détermination de  $p_F(x)$  par une base orthonormée de  $F$  :

Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormée de  $F$  alors  $p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle e_i$ .

Cas d'une base orthogonale de  $F$ , projection orthogonale sur  $F = \text{Vect}(u)$  :  $p_F(x) = \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} u$ .

Projection orthogonale sur un hyperplan  $\text{Vect}(u)^\perp$  :  $p_H(x) = x - \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} u$ .

Distance (euclidienne) associée au produit scalaire.

Distance  $d(x, A)$  d'un vecteur  $x$  à une partie non vide  $A$ .

Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Le projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$  est l'unique élément de  $F$  qui réalise la distance de  $x$  à  $F$ , existence d'un minimum.

Calculs pratiques de distance suivant la démarche :

$$\begin{aligned} d(x, F)^2 &= \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle^2 && \text{quand } (e_1, \dots, e_p) \text{ est une BON de } F \\ &= \|p_{F^\perp}(x)\|^2 && \text{utile si } F^\perp \text{ de dimension inférieure à } F \\ &= \langle x - p_F(x), x - p_F(x) \rangle = \langle x, x - p_F(x) \rangle && \text{quand } p_F(x) \text{ obtenu par un système} \end{aligned}$$

$$\text{Distance à un hyperplan } H = \text{Vect}(u)^\perp : d(x, H) = \frac{|\langle u, x \rangle|}{\|u\|}$$

# ISOMÉTRIES VECTORIELLES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

## Isométries vectorielles

Conservation de la norme, caractérisations par conservation du produit scalaire, par l'image d'une/ de toute base orthonormée .

$\mathcal{O}(E)$  groupe orthogonal de  $E$  stable par composée et passage à l'inverse.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Les symétries orthogonales sont des isométries, réflexions.

## Matrices orthogonales

Définition, interprétation/caractérisation en termes de colonnes et de lignes.

Caractérisation matricielle en base orthonormée d'une isométrie.

Caractérisation d'une matrice orthogonale par matrice de changement de base orthonormée .

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  (ou  $\mathcal{O}(n)$ ) groupe orthogonal d'ordre  $n$ . Déterminant d'une matrice orthogonale, groupe spécial orthogonal d'ordre  $n$   $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  (ou  $\mathcal{SO}(n)$ ,  $(\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R}))$  HP)). Stabilité par produit et passage à l'inverse.

## Orientation

Bases orthonormées directes/indirectes.

Produit mixte, interprétation en termes d'aire/volume. Notation  $[u, v]$ ,  $[u, v, w]$ .

Dans un espace euclidien orienté de dimension 3 :

produit vectoriel, calcul en base orthonormée directe , propriétés.

Si  $(u, v, w)$  BOND alors  $w = u \wedge v$ , si  $(u, v)$  orthonormale alors  $(u, v, u \wedge v)$  BOND.

Orientation d'un plan par un vecteur normal.

## Description des isométries d'un plan euclidien orienté

Description de  $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ , matrices de rotation  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Commutativité sur  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ .

Description de  $\mathcal{O}(E)$  : les rotations et les réflexions. Mesure de l'angle d'une rotation.

Mesure d'un angle orienté de deux vecteurs non nuls (notion).

## Isométries d'un espace euclidien orienté de dimension 3

Rotations vectorielles, mesure  $\theta$  de l'angle de la rotation  $r$  autour de la droite  $E_1(r) = \text{Vect}(u)$  orienté par  $u$ , réduction dans une BOND  $\mathcal{B} = (\frac{u}{\|u\|}, e_2, e_3) : \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R(\theta) \end{pmatrix}$ .

$\text{tr}(r) = 1 + 2 \cos(\theta)$ .

Pour tout  $x \notin E_1(r)$ ,  $\sin \theta$  du signe du produit mixte  $[u, x, r(x)]$  (utilisé mais  $\sim$  HP).

Description de  $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ , matrices de la forme  $A = P \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R(\theta) \end{pmatrix} P^{-1}$  avec  $P \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ .

# ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Endomorphisme autoadjoint,  $\mathcal{S}(E)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ . Caractérisation des projecteurs orthogonaux (parmi les projecteurs). Caractérisation matricielle en base orthonormée des autoadjoints.

Si  $F$  est stable par  $u$  autoadjoint alors  $F^\perp$  également.

Les sous-espaces propres d'un autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

### Théorème spectral :

Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Formulation matricielle pour les matrices symétriques réelles.

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Caractérisation spectrale, notations  $\mathcal{S}^+(E)$ ,  $\mathcal{S}^{++}(E)$ .

Matrice symétrique positive, définie positive. Caractérisation spectrale, notations  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .