

ISOMÉTRIES VECTORIELLES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Isométries vectorielles

Conservation de la norme, caractérisations par conservation du produit scalaire, par l'image d'une/ de toute base orthonormée .

$\mathcal{O}(E)$ groupe orthogonal de E stable par composée et passage à l'inverse.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Les symétries orthogonales sont des isométries, réflexions.

Matrices orthogonales

Définition, interprétation/caractérisation en termes de colonnes et de lignes.

Caractérisation matricielle en base orthonormée d'une isométrie.

Caractérisation d'une matrice orthogonale par matrice de changement de base orthonormée .

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{O}(n)$) groupe orthogonal d'ordre n . Déterminant d'une matrice orthogonale, groupe spécial orthogonal d'ordre n $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{SO}(n)$, $(\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ HP)). Stabilité par produit et passage à l'inverse.

Orientation

Bases orthonormées directes/indirectes.

Produit mixte, interprétation en termes d'aire/volume. Notation $[u, v], [u, v, w]$.

Dans un espace euclidien orienté de dimension 3 :

produit vectoriel, calcul en base orthonormée directe , propriétés.

Si (u, v, w) BOND alors $w = u \wedge v$, si (u, v) orthonormale alors $(u, v, u \wedge v)$ BOND.

Orientation d'un plan par un vecteur normal.

Description des isométries d'un plan euclidien orienté

Description de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, matrices de rotation $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Commutativité sur $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

Description de $\mathcal{O}(E)$: les rotations et les réflexions. Mesure de l'angle d'une rotation.

Mesure d'un angle orienté de deux vecteurs non nuls (notion).

Isométries d'un espace euclidien orienté de dimension 3

Rotations vectorielles, mesure θ de l'angle de la rotation r autour de la droite $E_1(r) = \text{Vect}(u)$ orienté par u ,

réduction dans une BOND $\mathcal{B} = (\frac{u}{\|u\|}, e_2, e_3)$: $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R(\theta) \end{pmatrix}$.

$\text{tr}(r) = 1 + 2 \cos(\theta)$.

Pour tout $x \notin E_1(r)$, $\sin \theta$ du signe du produit mixte $[u, x, r(x)]$ (utilisé mais $\sim$ HP).

Description de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, matrices de la forme $A = P \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R(\theta) \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Endomorphisme autoadjoint, $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux (parmi les projecteurs). Caractérisation matricielle en base orthonormée des autoadjoints.

Si F est stable par u autoadjoint alors $F^\perp$ également.

Les sous-espaces propres d'un autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

Théorème spectral :

Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Formulation matricielle pour les matrices symétriques réelles.

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Caractérisation spectrale, notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$.

Matrice symétrique positive, définie positive. Caractérisation spectrale, notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

ESPÉRANCE ET VARIANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

⚠ Pas de fonctions génératrices et d'inégalités de concentration cette semaine.

Espérance

Les VAD sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Espérance d'une VAD à valeurs dans $[0, +\infty]$.

Espérance d'une VA à valeurs dans $\mathbb{N}$, $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

Une VA discrète à valeurs réelles ou complexes est d'espérance finie si $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, dans ce cas $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

Espérances finies des variables géométriques et de Poisson.

Formule de transfert, cas d'un couple (ou n -uplet).

Inégalité triangulaire, théorème de comparaison, cas particulier d'une VAD bornée.

Linéarité de l'espérance, variable centrée, positivité, croissance.

Si X est positive d'espérance nulle alors $X = 0$ presque sûrement.

Produit de variables aléatoires indépendantes et d'espérance finie.

Variance

Les VAD sont maintenant réelles.

(HP) Définitions des moments d'une VA, lien entre les existences de moments.

Si X^2 est d'espérance finie (ie X admet un moment d'ordre 2) alors X est d'espérance finie (ie X admet un moment d'ordre 1).

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors XY admet une espérance finie et $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$, cas d'égalité.

Stabilité par CL des VA admettant un moment d'ordre 2.

Définition de la variance, variance finie. Positivité, cas nul.

$V(aX + b)$.

Formule (théorème) de Koenig-Huygens : X admet une variance finie ssi X^2 admet une espérance finie et dans ce cas : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Écart-type, variable réduite, variable centrée réduite associée à une VA X .

Variance finie des variables géométriques et de Poisson.

Covariance

Définition de $\text{Cov}(X, Y)$ lorsque X et Y sont de variance finie. Variables décorréliées.

Formule de Koenig-Huygens : $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Bilinéarité, cas de deux VA indépendantes.

Variance d'une somme finie, cas de variables 2 à 2 indépendantes (décorréliées suffisant).