

ESPÉRANCE ET VARIANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Espérance

Les VAD sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Espérance d'une VAD à valeurs dans $[0, +\infty]$.

Espérance d'une VA à valeurs dans $\mathbb{N}$, $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

Une VA discrète à valeurs réelles ou complexes est d'espérance finie si $(xP(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, dans ce cas $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x)$.

Espérances finies des variables géométriques et de Poisson.

Formule de transfert, cas d'un couple (ou n -uplet).

Inégalité triangulaire, théorème de comparaison, cas particulier d'une VAD bornée.

Linéarité de l'espérance, variable centrée, positivité, croissance.

Si X est positive d'espérance nulle alors $X = 0$ presque sûrement.

Produit de variables aléatoires indépendantes et d'espérance finie.

Variance

Les VAD sont maintenant réelles.

(HP) Définitions des moments d'une VA, lien entre les existences de moments.

Si X^2 est d'espérance finie (ie X admet un moment d'ordre 2) alors X est d'espérance finie (ie X admet un moment d'ordre 1).

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors XY admet une espérance finie et $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$, cas d'égalité.

Stabilité par CL des VA admettant un moment d'ordre 2.

Définition de la variance, variance finie. Positivité, cas nul.

$V(aX+b)$.

Formule (théorème) de Koenig-Huygens : X admet une variance finie ssi X^2 admet une espérance finie et dans ce cas : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Écart-type, variable réduite, variable centrée réduite associée à une VA X .

Variance finie des variables géométriques et de Poisson.

Covariance

Définition de $\text{Cov}(X, Y)$ lorsque X et Y sont de variance finie. Variables décorréées.

Formule de Koenig-Huygens : $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Bilinéarité, cas de deux VA indépendantes.

Variance d'une somme finie, cas de variables 2 à 2 indépendantes (décorréées suffisant).

Fonctions génératrices

X est ici à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$G_X(t) = E(t^X)$, définie ssi $\sum P(X=n)t^n$ est ACV. (ssi $(P(X=n)t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sommable).

Série entière $\sum P(X=n)t^n$ (série génératrice de X) : rayon de convergence ≥ 1 , convergence normale sur $[-1, 1]$, somme G_X définie et continue sur $[-1, 1]$.

Programme : Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

La fonction génératrice caractérise la loi.

X est d'espérance finie ssi G_X est dérivable en 1 et dans ce cas $E(X) = G'_X(1)$.

(HP, à reprouver) Si $R(\sum P(X=n)t^n) > 1$ alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $E(X(X-1)\cdots(X-k+1)) = G_X^{(k)}(1)$.

Savoir le reprouver en particulier pour $k=2$ pour montrer que

$E(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$, $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes (à valeurs dans $\mathbb{N}$).

Inégalités de concentration et loi faible des grands nombres

Inégalité de Markov

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Loi faible des grands nombres : Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de VAD réelles i.i.d. admettant une variance finie σ^2 .

On pose $m = E(X_1)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P \left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Programme officiel : Les étudiants doivent savoir retrouver :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P \left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\sigma}{n\varepsilon^2}$$