PSI – LMB

Programme de colle n° 6 9 nov – 13 nov

Réduction

Éléments propres

- Éléments propres d'un endomorphisme, caractérisation des valeurs propres, cas de la dimension finie.
- Éléments propres d'une matrice carrée, caractérisation des valeurs propres, spectre d'une matrice triangulaire
- Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et de ses matrices, correspondances vectorielle/matricielle.
- Stabilité des sous espaces propres $E_\lambda(u)$ par v si v commute avec u.
- Liberté d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes, les sous-espaces propres sont en somme directe.
- Polynômes d'endomorphisme et de matrices carrées :
  Si $u(x) = \lambda x$ alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
  Si P est un polynôme annulateur de u alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathrm{Rac}(P)$.

Polynôme caractéristique

- Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique .
  $\chi_A = X^n - (\operatorname{tr} A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.
  Cas des matrices triangulaires ou triangulaires par blocs.
- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Rac}_{\mathbb{K}}(\chi_A)$, spectre complexe d'une matrice réelle.
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme (E de dim finie), lien avec spectre. Si F stable par u alors χ_{u_F} divise χ_u.
  Théorème de Cayley-Hamilton.
- multiplicité d'une valeur propre , $1 \leqslant m_\lambda \leqslant \dim E_\lambda(u)$, cas de la valeur propre simple.
  (On a utilisé la convention $m_\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$).
  Cas de la matrice réelle vue comme matrice complexe :
  $m_\lambda = m_{\overline{\lambda}}$, $\dim E_\lambda(u) = \dim E_{\overline{\lambda}}(u)$.
  Si χ_u scindé avec $\chi_u = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$ alors

$$\operatorname{tr} u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda \lambda \qquad \det u = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda}$$

TSVP

Diagonalisation

(E $\mathbb{K}$-ev de dim finie n)

- Diagonalisabilité des endomorphimes et des matrices carrées, lien entre les deux.

  Conditions Nécessaires et Suffisantes de diagonalisabilité :
  Les propositions suivantes sont équivalentes

  - $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable .
  - Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
  - $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
  - $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = n$
  - χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.
  - u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples .
  - $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u.

  Traductions matricielles en remplaçant u, E par $A, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

  Condition **Suffisante** de diagonalisabilité :
  Si u (ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ alors u (ou A) est diagonalisable. Cela équivaut à χ_u (ou χ_A) scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

  L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.

Trigonalisation

- Trigonalisation des endomorphismes et des matrices carrées, lien entre les deux.
- (Retour) Si trigonalisable, expression de la trace et du déterminant à l'aide des valeurs propres comptées avec multiplicité.
- u ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
- Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable, cas d'une matrice réelle vue comme comme complexe.

Applications de la réduction

- Puissances n-èmes d'une matrice carrée.
- Systèmes linéaires de suites récurrentes d'ordre 1.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre $p \geqslant 3$.
- Systèmes différentiels à coefficients constants d'ordre 1.
- Équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre $p \geqslant 3$.

Toute colle commencera par une ***question de cours double*** *:*

- *Une définition*
- *Un énoncé de théorème/règle/critère...*