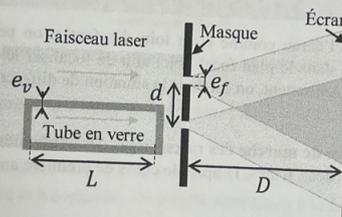


Mesure de l'indice optique d'un gaz

On considère deux fentes d'Young d'épaisseur $e_f = 0.1 \text{ mm}$ espacées de $d = 1 \text{ mm}$ et éclairées par un laser de longueur d'onde $\lambda = 525 \text{ nm}$. Un écran est placé à une distance $D = 4 \text{ m}$.

1. Qu'observe-t-on sur l'écran ? Que valent les interférences ?

On place un tube en verre transparent devant l'une des fentes. L'épaisseur de sa paroi est de $e_v = 0.5 \text{ mm}$, sa longueur intérieure vaut $L = 2.00000 \text{ cm}$. Ce tube est pour l'instant rempli d'air à la pression atmosphérique.



2. Cela a-t-il une influence sur la figure observée sur l'écran ?

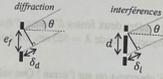
3. On remplace progressivement l'air contenu dans le tube par un gaz dont on souhaite mesurer l'indice. Une fois l'opération terminée, on a compté un déplacement total de la figure d'interférence de 22 franges. Que vaut l'indice du gaz ?

Données

Indice optique du verre : $n_v \simeq 2$
 Indice de l'air à 1 bar : $n_a = 1.00029$

Correction : Mesure de l'indice optique d'un gaz

1. Une fente est considérée comme un ensemble de sources ponctuelles, dont les rayons interfèrent entre eux : il s'agit du phénomène de **diffraction**. Ces rayons interfèrent aussi avec ceux d'une autre fente : c'est le phénomène d'**interférences**. Comme $D \gg d$, on peut considérer qu'on a diffraction et interférences à l'**infini** (diffraction de *Fraunhofer*) : les rayons utilisés pour calculer la différence de marche sont **parallèles**. On considère la variable θ qui est l'angle d'incidence des rayons.



Petit plus

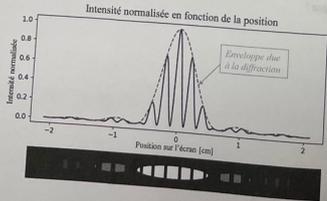
Si on ne peut pas considérer l'écran comme étant loin des fentes, on peut utiliser une **lentille convergente** et placer l'écran dans le plan focal objet afin de focaliser les rayons parallèles. Les calculs sont alors les mêmes. Autrement, on est dans la situation de diffraction dite de *Fresnel*.

On note $\delta_d = e_f \sin \theta$ la **différence de marche** des rayons issus des extrémités d'une fente, et $\delta_i = d \sin \theta$ celle des rayons moyens issus des deux fentes. D'après le cours de première année, l'expression de l'intensité lumineuse vaut :

$$I(x) = 2I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi \delta_d}{\lambda}\right) \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi \delta_i}{\lambda}\right) \right]$$

dû à la diffraction
dû aux interférences

On a la relation $x = D \tan \theta \approx D\theta$ lorsque θ est petit. En pratique, c'est le cas pour les franges observables puisque l'intensité décroît très rapidement avec θ . On obtient la **figure d'interférence** suivante :



Question d'examinateur

Justifiez l'expression du terme dû aux interférences.

On considère les deux rayons moyens issus du centre de chacune des fentes. On considère qu'ils ont la forme d'ondes planes progressives sinusoïdales, d'expressions :

$$\begin{cases} A_1(t, z) = A \cos(\omega t - k_0 z) \\ A_2(t, z) = A \cos[\omega t - k_0(z + \delta_i)] \end{cases}$$

Avec $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ le nombre d'onde. Les amplitudes lumineuses se somment sur l'écran :

$$A_1(t, D) + A_2(t, D) = 2A \cos\left(\frac{k_0 \delta_i}{2}\right) \cos\left(\omega t - k_0 D - k_0 \frac{\delta_i}{2}\right)$$

nouvelle amplitude

L'œil est sensible à l'**intensité** lumineuse proportionnelle au carré de l'amplitude :

$$\text{Intensité des franges sur l'écran} < 4 A^2 \cos^2\left(\frac{\delta_i}{\lambda}\right) = 2I \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi \delta_i}{\lambda}\right) \right]$$

L'intensité I d'un rayon est une fonction de θ à cause de la diffraction : $I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi \delta_d}{\lambda}\right)$. Cette expression est admise et à connaître. On aboutit finalement à la formule du cours.

L'**interfrange** due à la diffraction i_d se déduit de deux annulations consécutives du terme $\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi \delta_d}{\lambda}\right)$ (sans compter la tache centrale). Soit $n \in \mathbb{Z}^*$, on a annulation lorsque :

$$\frac{\pi \delta_d}{\lambda} = n\pi \Rightarrow \sin \theta = n \frac{\lambda}{e_f}$$

Pour mémoire

Comme $\sin \theta \leq 1$, cette égalité montre que la diffraction ne peut avoir lieu que pour des ouvertures ou des objets dont la taille est **supérieure à la longueur d'onde**.

Dans l'approximation des petits angles ($e_f \gg \lambda$), on a pour $n = 1$ et 2 : $\Delta \theta_{12} = \frac{\lambda}{e_f}$. L'**interfrange** due à la diffraction observée sur l'écran vaut alors $i_d = \frac{D\lambda}{e_f}$.

En procédant de même avec le terme dû aux interférences : $1 + \cos\left(\frac{2\pi \delta_i}{\lambda}\right)$, on obtient : $i_i = \frac{D\lambda}{d}$.

2. On place un tube en verre sur la trajectoire du rayon lumineux en amont d'une fente. Cela modifiera probablement son amplitude à cause de la réflexion sur le verre, mais cela changera surtout sa **différence de marche**. En effet, l'indice optique représente le rapport de la célérité de la lumière dans le vide c_0 par rapport à c_{milieu} sa célérité dans le milieu considéré :

$$n_{\text{milieu}} = \frac{c_0}{c_{\text{milieu}}}$$

L'indice du verre est **plus élevé** que celui de l'air, la lumière s'y propage donc **moins vite**.

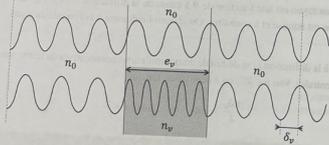
Astuce

Dans un problème linéaire, il y a toujours **conservation de la fréquence** entre la grandeur d'entrée et la grandeur de sortie.

La fréquence de l'onde transmise est la même que celle de l'onde incidente. C'est uniquement sa **longueur d'onde** qui change :

$$\lambda_{\text{milieu}} = \frac{c_{\text{milieu}}}{f}$$

Lorsque l'onde ressort du verre, il n'y a aucune raison pour qu'elle soit en phase avec celle qui n'a traversé que de l'air ! Ce déphasage peut être matérialisé spatialement par une différence de marche δ_v .



On cherche l'expression de δ_v . Soit $k_0 = \frac{\omega}{v_0}$. Le nombre d'onde dans le verre vaut $k_v = \frac{\omega}{v_v} = n_v \frac{\omega}{v_0} = n_v k_0$, et celui du verre vaut $k_0 = n_a k_0$. On calcule les phases d'un rayon qui traverse de l'air ϕ_0 et d'un rayon qui traverse une face du tube ϕ_v :

$$\begin{cases} \text{Avant le verre : } \phi_0(t, z = 0) = \omega t & \text{Après le verre : } \phi_0(t, z = e_v) = \omega t - n_a k_0 e_v \\ \text{Avant le verre : } \phi_v(t, z = 0) = \omega t & \text{Après le verre : } \phi_v(t, z = e_v) = \omega t - n_v k_0 e_v \end{cases}$$

Le déphasage vaut $\Delta\phi = k_0 e_v (n_v - n_a)$. La différence de marche dans l'air à la sortie du verre vaut :

$$\delta = \frac{\Delta\phi}{k_0} = \frac{n_v - n_a}{n_a} e_v$$

En réalité, le rayon traverse deux faces du tube soit une épaisseur $2e_v$ de verre avant d'atteindre la fente :

$$\delta_v = 2\delta = 2 \frac{n_v - n_a}{n_a} e_v$$

Cette différence de marche "offset" entraîne un déplacement des franges d'interférence **uniquement** :

$$\delta_i = d \sin \theta + \delta_v$$

En revanche, l'indice du verre n'est pas connu avec assez de précision pour en dire plus sur ce déplacement.

Petit plus

Il se peut que la traversée du verre rende impossible toute interférence. En effet, il existe une **longueur de cohérence** (hors programme) qui est la longueur d'un train d'onde émis par la source. Pour que les figures d'interférences soient visibles, il faut qu'un train d'onde interfère avec lui-même. Ce n'est pas le cas si le verre le ralentit au point que la différence de marche excède la longueur de cohérence... Le rayon manque son train !

3. Lorsqu'on remplit le tube de gaz, l'indice du milieu à l'intérieur du tube change progressivement. D'après la question précédente, on peut affirmer que les franges vont bouger progressivement. En effet, une différence de marche propre au gaz va s'ajouter à la différence de marche totale : $\delta_g = \frac{n_g - n_a}{n_a} L$.

Petit plus

La **loi de Gladstone** lie l'indice à la pression (et la température) d'un gaz. On peut faire un parallèle avec la **loi de Beer-Lambert** en chimie, qui lie l'absorbance à la concentration d'un soluté. En effet, un gaz parfait se comporte de manière très similaire à une solution diluée. De plus, l'indice de réfraction et l'absorbance sont tous deux des propriétés optiques.

On observe un point fixe de l'écran. Le défilement d'une frange équivaut à un déplacement de λ de la différence de marche :

$$\delta_i = \underbrace{d \sin \theta + \delta_v}_{\text{fixé}} + \underbrace{\frac{n_g - n_a}{n_a} L}_{\text{provoque le défilement}}$$

On observe le défilement de 22 franges (mais on ne sait pas dans quel sens) :

$$\frac{n_g - n_a}{n_a} L = \pm 22 \lambda \Rightarrow n_g = n_a \pm 22 \frac{n_a \lambda}{L}$$

A.N. : $n_g = 1.00029 \pm 5.78 \times 10^{-4}$.

✍ Pour mémoire

On se rend bien compte de l'importance des **chiffres significatifs** dans cette situation ! Il faut que le tube soit fabriqué avec une **grande précision**.

Les matériaux qui ont un indice optique plus petit que 1 sont **extrêmement rares** (mais ils existent, certains méta-matériaux ont des indices optiques apparents négatifs !).

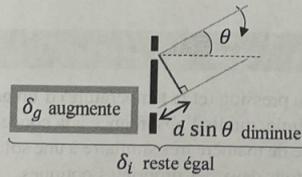
☞ **A.N.** : $n_g = 1.00029 + 5.78 \times 10^{-4} = 1.00087$

📐 Question d'examineur

Dans quel sens se déplacent les franges sur l'écran ?

Tout dépend de la fente devant laquelle on a placé le tube. Augmenter l'indice augmente le retard et donc augmente la différence de marche avec la convention du schéma ci dessous.

Or, $\delta_t = d \sin \theta + \delta_r + \delta_g$. Une augmentation de la différence de marche due au gaz δ_g ne peut être compensée que par une variation de θ **du côté où se trouve le tube** pour conserver une différence de marche et une intensité égales.



Par exemple, si le tube est placé devant la fente de droite (en regardant vers l'écran), une augmentation progressive d'indice décalera les franges vers la droite.

Microscope optique

Un microscope optique est constitué d'un *objectif* L_1 et d'un *oculaire* L_2 . Ce sont des lentilles convergentes considérées minces. Le foyer image de l'objectif F_1' et le foyer objet de l'oculaire F_2 sont séparés d'une distance fixe appelée *intervalle optique* $\Delta = 10\text{ cm}$.



1. Pour un meilleur confort visuel, où doit se trouver l'image en sortie du microscope ? Faire un schéma.

Les inscriptions " $\times 10$ " et " $\times 50$ " sont gravées respectivement sur l'oculaire et l'objectif. Il s'agit de leur *grossissement commercial*, c'est-à-dire le rapport de l'angle avec lequel on voit l'image à l'infini d'un objet à travers la lentille avec l'angle avec lequel ce même objet serait vu par un œil emmétrope à une distance correspondant à son *punctum proximum*.

2. Déterminer les distances focales f_1' de l'objectif et f_2' de l'oculaire.

La latitude de mise au point correspond à l'intervalle de distance entre l'objectif et l'objet, tel que l'image perçue par l'œil emmétrope de l'observateur positionné au foyer image de l'oculaire soit nette, éventuellement au prix d'une accommodation.

3. Calculer la latitude de mise au point du microscope. Commenter.
Que vaut le grossissement commercial du microscope ?

4. Déterminer la position et le diamètre du *cercle oculaire*, image de la monture de l'objectif à travers l'oculaire. Quel est l'intérêt pour l'observateur de placer son œil dans le cercle oculaire ?

► Correction : Microscope optique

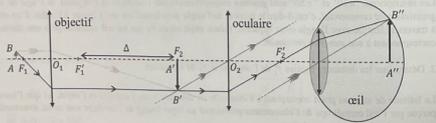
1. Un œil au repos voit net au niveau de son *punctum remotum*, situé à l'infini dans le cas d'un œil emmétrope. Cela signifie que les rayons doivent être parallèles entre eux en sortie du microscope. Autrement, il est nécessaire au *cristallin* de se contracter afin d'*accommoder* la vision, ce qui peut entraîner une fatigue oculaire sur le long terme. L'image obtenue par l'objectif doit donc se situer sur le plan focal objet de l'oculaire, afin que l'image de l'oculaire soit à l'infini.

✦ Pour mémoire

Tous les yeux ne sont pas emmétropes. Le tableau ci-dessous détaille deux des défauts les plus courants de la vision.

	Emmétropie	Myopie	Hypermétropie
Cristallin	Normal	Trop convergent	Pas assez convergent
Punctum remotum	$+\infty$	$< +\infty$	< 0
Punctum proximum	≈ 25 cm	< 25 cm	> 25 cm
Correction	Aucune	Lentilles divergentes	Lentilles convergentes

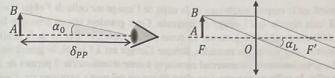
On obtient le tracé ci-dessous.



✦ Astuce

Dans un système à plusieurs lentilles, il est souvent plus facile de commencer le tracé à partir de l'image intermédiaire, qu'on peut considérer comme un véritable objet pour la construction des rayons. Il n'est pas utile ni conseillé de prolonger tous les rayons de leur source jusqu'à l'écran. Dans le cas présent, on peut commencer par tracer l'image en A' , puis en déduire le reste. L'ordre de construction est indiqué par le nombre de flèches sur les rayons.

2. On note α_0 l'angle vu par l'œil d'un objet situé à δ_{pp} son *punctum proximum*, et α_L l'angle sous lequel l'œil voit l'image projetée à l'infini d'un objet au travers d'une lentille convergente.



On exprime la distance focale $f' = \overline{OF'}$ en fonction du grossissement commercial G . On a d'abord :

$$\begin{cases} \tan \alpha_0 = \frac{AB}{\delta_{pp}} \\ \tan \alpha_L = \frac{AB}{f'} \end{cases}$$

La plupart des résultats sur les instruments d'optique sont obtenus dans les conditions de Gauss. On fait donc l'approximation des petits angles. On obtient alors :

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{AB}{\delta_{pp}} \\ \alpha_L = \frac{AB}{f'} \end{cases}$$

✦ Piège

Cette approximation est laissée à l'initiative du candidat. Le simple fait de tracer un schéma d'optique géométrique faisant apparaître des lentilles minces suppose l'*aplanétisme* et le *stigmatisme*, ce qui est vrai dans les conditions de Gauss.

Or $G = \frac{\alpha_L}{\alpha_0} = \frac{\delta_{pp}}{f'}$. On en déduit :

$$f' = \frac{\delta_{pp}}{G}$$

■ A.N. : On prend $\delta_{pp} = 25$ cm.

- Distance focale de l'objectif : $f'_1 = 5$ mm
- Distance focale de l'oculaire : $f'_2 = 2.5$ cm

Question d'examineur

Quelle est la différence entre le grossissement commercial et le grandissement?

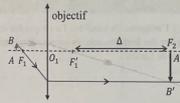
Le **grandissement** est le rapport algébrique de la taille de l'image sur celle de l'objet $\gamma = \frac{A'B'}{AB}$. S'il est **négligé**, cela signifie que l'image est **inversée**. Cette grandeur n'a un sens que lorsqu'il y a une **image réelle mesurable** (projetée sur un écran par exemple), et dépend de la position de la lentille, de l'objet et de l'écran. En revanche, lorsque l'image est à l'infini, le grandissement n'a pas de sens... Le **grossissement commercial** est adapté à cette situation, car il permet de comparer des angles. En effet, la **taille apparente** d'un objet vu par un œil peut s'exprimer par l'**angle qu'il occupe dans son champ de vision**. Plus cet angle est important, plus l'objet paraît gros!

3. Pour répondre à cette question, on peut suivre les étapes suivantes :

- Déterminer la position de l'objet pour que l'image de sortie soit nette sans accommodation;
- Déterminer la position de l'objet pour que l'image soit nette avec une accommodation maximale;
- En déduire la latitude de mise au point.

Position de l'objet pour une image nette sans accommodation

Pour que l'image soit nette sans accommodation, il faut qu'elle soit projetée à l'infini. Pour cela, il faut que l'image intermédiaire obtenue par l'objectif se situe sur le plan focal objet de l'oculaire.



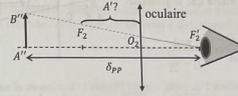
D'après la relation de conjugaison de Newton, on a :

$$\frac{F_1A \cdot F_1A'}{\Delta} = \underbrace{O_1F_1 \cdot O_1F_1'}_{-f_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{F_1A}{\Delta} = -\frac{f_1^2}{\Delta}$$

Position de l'objet pour une image nette avec accommodation

Un œil emmétrope peut voir net un objet jusqu'à son *punctum proximum*. Dans le cas du microscope, il s'agit d'une *image virtuelle*, qui se situe derrière l'oculaire à une distance δ_{pp} de l'œil. L'image issue de l'objectif se situe au point A' sur l'axe optique, quelque part entre F_2 et O_2 .



Astuce

Les relations de conjugaison restent valables pour les images et les objets virtuels!

D'après la relation de conjugaison de Newton, on a :

$$\frac{F_2A' \cdot F_2A''}{-\delta_{pp}} = -f_2^2 \Rightarrow \frac{F_2A'}{\delta_{pp}} = \frac{f_2^2}{\delta_{pp}}$$

On calcule ensuite la position de l'objet par rapport au foyer objet de l'objectif :

$$\frac{F_1A \cdot F_1A'}{\Delta + F_2A'} = -f_1^2 \Rightarrow \frac{F_1A}{\Delta} = -\frac{f_1^2}{\frac{f_2^2}{\delta_{pp}} + \Delta}$$

Latitude de mise au point

On note Δ_L la **latitude de mise au point**, égale à la différence entre les deux positions calculées précédemment. Elle vaut donc :

$$\Delta_L = \frac{f_1^2}{\Delta} - \frac{f_1^2}{\frac{f_2^2}{\delta_{pp}} + \Delta}$$

■ A.N. : $\Delta_L = 6.1 \mu\text{m}$

On constate que cette distance est extrêmement faible, mais **cohérente** : c'est pour cette raison que les microscopes sont munis de **vis de réglage micrométriques**.

Grossissement commercial de l'ensemble

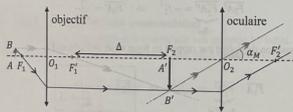
Si le microscope est bien réglé, l'image est à l'infini, donc A' est situé en F_2 . On a d'après ce qui précède : $F_1A = -f_1'$. En utilisant le **théorème de Thalès** sur les triangles ABO_1 et $F_2B'O_1$, on trouve que le grossissement intermédiaire vaut :

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{O_1F_1 + F_1A'}{O_1F_1 + F_1A} = \frac{f_1' + \Delta}{-f_1' - \frac{f_1'}{\Delta}}$$

Δ.N. : $\gamma = -20$

Le grossissement absolu étant de 20, un objet de 0.1 mm (seuil du monde microscopique) a une image de 2 mm par l'objectif. Cette valeur est plus de dix fois plus petite que la distance focale de l'oculaire. On peut donc toujours utiliser l'**approximation des petits angles** pour évaluer l'angle α_M des rayons par rapport à l'axe optique en sortie du microscope :

$$\alpha_M = \frac{A'B'}{f_2} = |\gamma| \frac{AB}{f_2}$$



En effectuant le rapport avec $\alpha_0 = \frac{AB}{f_0}$ l'angle vu par l'œil sans système optique, on calcule le grossissement commercial du microscope :

$$G_M = \frac{\alpha_M}{\alpha_0} = \frac{|\gamma| \delta p}{f_2}$$

Δ.N. : $G_M = 200$

On remarque que ce grossissement est plus de deux fois inférieur au produit des grossissements commerciaux de l'oculaire et de l'objectif qui vaut 500 ! Les grossissements commerciaux ne peuvent pas être multipliés et n'ont un sens que pour une lentille seule, mais l'acheteur ne le sait pas forcément...

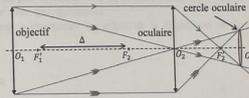
⊗ Petit plus

Un bon microscope optique peut grossir jusqu'à 2000 fois. Sa résolution est ensuite limitée par la **diffraction** : un point devient une tache, appelée *tache d'Airy*. La taille du plus petit détail distinguable par le **critère de Rayleigh** vaut $\epsilon = \frac{\lambda}{n \sin \beta}$, avec λ la longueur d'onde de la lumière, n l'indice du milieu dans lequel est plongé l'objectif et β l'angle maximum des rayons pénétrants dans l'objectif. Le terme $n \sin \beta$ s'appelle l'**ouverture numérique**.

4. On considère cette fois la monture de l'objectif comme objet de l'oculaire. On utilise la **relation de conjugaison de Descartes** $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$, avec $p' = \overline{O_2O_1}$, $p = \overline{O_2O_1} = -\Delta - f_1' - f_2'$:

$$\overline{O_2O_1} = \frac{pf_2'}{p+f_2'}$$

Δ.N. : $\overline{O_2O_1} = 3.1 \text{ cm}$



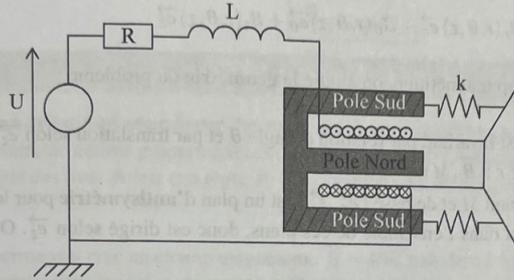
Le cercle oculaire est l'image de l'objectif : toute la lumière qui en provient s'y concentre. C'est donc l'endroit le plus **lumineux** où puisse se placer l'œil de l'observateur.

⊗ Petit plus

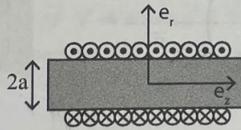
Placer son œil sur le cercle oculaire permet également d'obtenir l'**image la plus complète possible**. En effet, tous les rayons s'y concentrent dans un disque de faible taille, *plus petit que la pupille* si le microscope est bien réglé. Si on place son œil ailleurs, certains rayons provenant du bord de l'image ne parviennent pas jusqu'à la rétine : l'image paraît *rognée*.

Haut-parleur électro-dynamique

On considère le haut-parleur électro-dynamique représenté ci-dessous. Le dispositif est constitué d'un circuit électrique et d'un aimant symétrique de révolution, relié par un ressort de constante de raideur k à la membrane.



1. On assimile l'enroulement autour de la branche centrale de l'aimant à un solénoïde infini, composé de n spires par mètres, et parcouru par un courant i . Donner l'expression du champ \vec{B} dans et hors du solénoïde.
2. Donner l'expression de la force contre-électromotrice générée par le déplacement du solénoïde dans le champ $\vec{B} = B\vec{e}_r$ créé par l'aimant en fonction de B , de a le rayon intérieur du solénoïde et de z le déplacement du solénoïde.



3. On s'intéresse à l'onde sonore produite par la membrane. On ne néglige donc pas les frottements fluides modélisés par une force $\vec{F}_{\text{fluide}} = -\lambda \dot{z} \vec{e}_z$.
 - 3.1. Donner l'équation mécanique du système {solénoïde+membrane}.
 - 3.2. Dresser un bilan énergétique.

4. On suppose que le dispositif fonctionne en régime sinusoïdal, c'est-à-dire que le générateur délivre une tension de la forme $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$.

- 4.1. Mettre l'impédance équivalente du système sous la forme :

$$\underline{Z} = a + j\omega b + \underline{Z}_{\text{cinétique}}$$

- 4.2. En déduire un modèle électrique équivalent.

► Correction : Haut-parleur électro-dynamique

1. On considère un solénoïde infini symétrique de révolution autour d'un axe \vec{e}_z . On utilise les coordonnées cylindriques, et on cherche un champ magnétique de la forme générale :

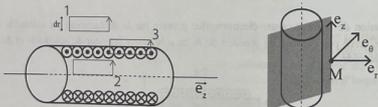
$$\vec{B} = B_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

Afin de simplifier l'écriture du champ magnétique, on étudie la géométrie du problème :

- **Invariances** : Le problème est invariant par rotation d'angle θ et par translation selon \vec{e}_z . Le champ magnétique ne dépend que de r : $\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$.
- **Symétries** : Tout plan contenant M et de base (\vec{e}_r, \vec{e}_z) est un plan d'**antisymétrie** pour les courants, le champ \vec{B} est donc contenu dans l'ensemble de ces plans, donc est dirigé selon \vec{e}_z . On en déduit que $B_r = B_\theta = 0$.

Finalement, on cherche un champ magnétique de la forme $\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_z$.

On considère trois contours d'Ampère :



Contours 1 et 2

On note \vec{B}_1 le champ magnétique régnant à l'extérieur du solénoïde, et \vec{B}_2 le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde. Les contours fermés et orientés 1 et 2 n'enlacent aucun courant. L'application du **théorème d'Ampère** le long de ces contours fermés donne :

$$\oint_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow B_1(r+dr) = B_1(r) \quad \text{et} \quad B_2(r+dr) = B_2(r)$$

Le champ magnétique est donc **uniforme** hors et dans le solénoïde. À l'infini, le champ est nul, donc le champ hors du solénoïde est nul :

$$\vec{B}_1 = \vec{0}$$

Contour 3

Le théorème d'Ampère sur le contour fermé 3 donne :

$$\oint_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_e \Rightarrow B_2 l - B_1 l = \mu_0 I_{int}$$

Avec l la longueur du contour selon \vec{e}_z . Or, le courant total qui passe à l'intérieur du contour 3 a pour expression $I_{int} = nIl$. On en déduit l'expression du champ magnétique dans le solénoïde :

$$\vec{B}_2 = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

• Piège

Un **schéma orienté** est attendu par l'examineur à cette question. Dans les exercices d'induction, il est nécessaire de définir proprement les **conventions d'orientation** choisies. On vérifie également que la **règle des trois doigts** (ou règle du tire-bouchon) est vérifiée, avec l'orientation définie.

2. L'aimant permanent crée un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ fixe dans lequel se déplace un solénoïde. On est dans un référentiel dans lequel le champ magnétique est stationnaire et le conducteur électrique se déforme : il s'agit d'un cas d'**induction de Lorentz**.

On serait tenté d'appliquer la **loi de Faraday** : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ et de calculer le flux dans le solénoïde. Cependant, le champ magnétique (selon \vec{e}_z) est **orthogonal** à la surface délimitée par une spire (de normale selon \vec{e}_z). *A priori le flux semble nul (ce n'est pas le cas en réalité, mais cela dépasse le cadre du programme).*

Pour résoudre ce problème, on réalise un **bilan de puissance** : la puissance électrique consommée est égale à la puissance fournie par la **force de Laplace** $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$:

$$I de = \vec{a} d\vec{r} \cdot \vec{v} \Rightarrow de = (\vec{a} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z dz$$

e est la tension induite aux bornes de la portion de fil dl . Pour remonter à la **force contre-électromotrice**, on intègre sur l'ensemble du fil soit $l = 2\pi \text{tanh}$ où h est la longueur du solénoïde :

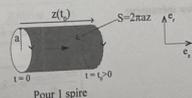
$$e = \int_0^l B_0 dz = l B_0$$

⊕ Petit plus

La loi de Faraday s'applique toujours. Cependant, dans l'**induction de Lorentz** il faut aussi considérer le **flux coupé** (hors programme) pendant le déplacement de la spire, qui vaut :

$$\Phi = 2\pi \text{tanh} B_0 z = l B_0 z$$

Et on retrouve l'expression de la force contre-électromotrice avec la formule $e = -\frac{d\Phi}{dt}$.



3.

3.1. On isole la membrane de masse m , dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La membrane est soumise à :

- **Forces de frottement fluide** : $\vec{F}_{\text{visc}} = -\lambda z \vec{e}_z$
 - **Effort du ressort** : $\vec{F}_{\text{ressort}} = -kz \vec{e}_z$. On choisit l'origine du repère de sorte que la position $z = 0$ correspond à la longueur à vide du ressort.
 - **Forces de Laplace** : $\vec{F}_{\text{Laplace}} = j \vec{dl} \wedge \vec{B}$.
- L'énoncé donne $\vec{B} = B \vec{e}_z$. Le vecteur de déplacement \vec{dl} correspond au déplacement du courant dans le solénoïde soit $\vec{dl} = dl \vec{e}_\theta$. Finalement : $\vec{F}_{\text{Laplace}} = -iB \vec{e}_z$.

On obtient l'équation mécanique par application de la **deuxième loi de Newton** à la membrane :

$$m\ddot{z} = -\lambda z - kz - iB$$

⊕ Petit plus

La force de Laplace provient de la **force de Lorentz** magnétique : $\vec{F}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B}$, qui dévie les particules vers les parois du conducteur. Cela crée une **inhomogénéité** et donc un champ électrique appelé **champ de Hall**. Ce champ exerce alors une force de Lorentz électrique sur les ions qui composent le conducteur : $\vec{F}_E = -q \vec{E}$. C'est cette force qui déplace le matériau.

3.2. On dispose d'une équation électrique et d'une équation mécanique :

Équation électrique

$$U = Ri + L \frac{di}{dt} - iBz$$

↪ $\times i$

$$P_{\text{elec}} = Ri^2 + P_{\text{mag}} - iBzi$$

Où $P_{\text{mag}} = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} Li^2)$

Équation mécanique

$$m\ddot{z} = -\lambda z - kz - iB$$

↪ $\times z$

$$\frac{dE_{\text{cinétique}}}{dt} = -\lambda z^2 - \frac{dE_{\text{potentielle}}}{dt} - iBzi$$

Où $E_{\text{potentielle}} = \frac{1}{2} k z^2$ et $E_{\text{cinétique}} = \frac{1}{2} m \dot{z}^2$.

Or, on a : $E_{\text{cinétique}} + E_{\text{potentielle}} = E_{\text{meca}}$, d'où $-iBzi = \frac{dE_{\text{potentielle}}}{dt} + \lambda z^2$.

En combinant ces deux équations, on obtient le bilan suivant :

$$P_{\text{elec}} = P_{\text{meca}} + \underbrace{\lambda z^2}_{\text{puissance sonore}} + \underbrace{Ri^2 + P_{\text{mag}}}_{\text{Effet Joule}}$$

La puissance électrique injectée dans le montage est convertie en mouvement de la membrane P_{meca} , perdue par effet Joule Ri^2 , stockée dans le circuit magnétique P_{mag} et dissipée sous forme de puissance sonore λz^2 .

4.

4.1. Le dispositif fonctionne en régime sinusoïdal, on peut donc récrire les équations mécaniques et électriques (qui sont linéaires) dans le domaine complexe :

- **Équation électrique** : $u = Ri + jL\omega i - Bz$
- **Équation mécanique** : $m j\omega z = -\lambda z - k z - iBz$

L'équation mécanique permet d'obtenir :

$$z = -\frac{j\omega B i}{k + \lambda + j\omega + m(j\omega)^2}$$

On injecte cette expression dans l'équation électrique pour obtenir :

$$u = Ri + jL\omega i + \frac{j(Bi)^2 \omega}{k + \lambda + j\omega + m(j\omega)^2}$$

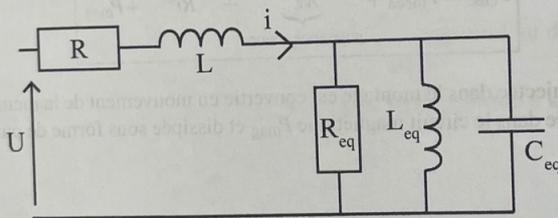
Soit l'**impédance équivalente** :

$$Z = \frac{u}{i} = R + jL\omega + \frac{j(Bi)^2 \omega}{k + \lambda + j\omega + m(j\omega)^2}$$

4.2. Pour proposer un modèle électrique de Z_{cin} , on propose d'en étudier l'inverse :

$$\frac{1}{Z_{\text{cin}}} = \underbrace{\frac{k}{(Bl)^2}}_{1/L_{\text{eq}}} \frac{1}{j\omega} + \underbrace{\frac{\lambda}{(Bl)^2}}_{1/R_{\text{eq}}} + \underbrace{\frac{m}{(Bl)^2}}_{C_{\text{eq}}} j\omega$$

On pose $C_{\text{eq}} = \frac{m}{(Bl)^2}$, $R_{\text{eq}} = \frac{(Bl)^2}{\lambda}$, et $L_{\text{eq}} = \frac{(Bl)^2}{m}$. Le schéma électrique équivalent devient :



⊕ Petit plus

L'impédance (à 1 kHz) d'un casque audio est une caractéristique importante. Une **faible impédance** doit correspondre à une faible puissance : un casque avec une impédance faible (inférieure à 64 Ω) est mieux adapté à une utilisation sur un appareil **nomade** (comme un smartphone). Les casques "**studio**" ont une grande impédance car on s'attend à ce qu'ils soient branchés sur un dispositif capable de fournir de la **puissance**. Pour une utilisation nomade, la puissance sonore sera supérieure avec un casque moins haut de gamme, mais avec une plus faible impédance !