

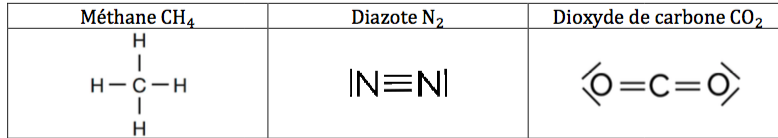
Partie A – Origines du *Blue Fire*

I – Gaz naturel

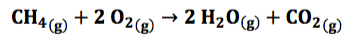
Q1. Représentation de Lewis des atomes H, C, N et O :



On en déduit les formules de Lewis :



Q2. Combustion du méthane :



Q3. Loi de Hess :

$$\Delta_r H^0 = 2 \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}(\text{g})) + \Delta_f H^0(\text{CO}_2(\text{g})) - \Delta_f H^0(\text{CH}_4(\text{g})) - 2 \Delta_f H^0(\text{O}_2(\text{g}))$$

$$\Delta_r H^0 = 2 \times (-241,8) + (-393,5) - (-74,6) - 2 \times 0 = -802,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Remarque : $\Delta_f H^0(\text{O}_2(\text{g})) = 0$ car c'est un élément simple et pur pris dans son état standard de référence.

$\Delta_r H^0 = -802,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} < 0$. C'est une réaction exothermique.

Q4. À température constante de 0°C, soit 273 K, sous pression constante, l'énergie thermique vaut :

$$Q = n \times \Delta_r H^0 = \frac{PV}{RT} \Delta_r H^0$$

Pour 1 m³ :

$$Q = \frac{1,013 \cdot 10^5 \times 1}{8,314 \times 273} \times (-802,5 \cdot 10^3) = -35,8 \cdot 10^6 \text{ J}$$

L'énergie thermique est cédée au milieu extérieur. On en déduit, toujours pour 1 m³ en kW · h :

$$\text{PCI} = \left| \frac{Q}{3600} \right| = 9,94 \text{ kW} \cdot \text{h} \cdot \text{m}^{-3}$$

Cette valeur est en accord avec l'encadrement proposé pour le gaz naturel commercial.

Q5. Consommation de $V_{\text{CH}_4} = 33,9 \cdot 10^9 \text{ m}^3$ de méthane. D'après la réaction de combustion, 1 mole de méthane libère 1 mole de CO₂. Quantité de méthane initiale n_0 :

$$n_0 = \frac{PV_{\text{CH}_4}}{RT}$$

Masse de dioxyde de carbone formée :

$$m_{\text{CO}_2} = n_0 \times M(\text{CO}_2) = \frac{PV_{\text{CH}_4}}{RT} \times M(\text{CO}_2) = \frac{1,013 \cdot 10^5 \times 33,9 \cdot 10^9}{8,314 \times 273} \times 44 \cdot 10^{-3} = 6,66 \cdot 10^{10} \text{ kg}$$

Sachant que l'empreinte carbone totale de la France correspond à $644 \cdot 10^9 \text{ kg}$ de CO₂, la combustion du méthane correspond à :

$$\frac{6,66 \cdot 10^{10}}{644 \cdot 10^9} = 10,3 \% \text{ de cette empreinte}$$

Q6. Méthode de la température de flamme. On va pour cela considérer un chemin fictif : en premier lieu la réaction chimique à $T_i = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$, puis l'échauffement du système (produits formés) jusqu'à T_f .

On suppose la réaction isobare à la pression atmosphérique ($Q = \Delta H^0$) et elle se déroule dans un réacteur adiabatique ($Q = 0$). On a donc $\Delta H^0 = 0$, la variation d'enthalpie entre l'état initial et l'état d'équilibre thermodynamique est nulle.

Partie 1 – Le blue fire - Centrale TSI 2025

La réaction chimique est supposée totale et dans les proportions stoechiométriques. On a de plus 4 fois plus de diazote que de dioxygène. Soit la composition du système à l'état final :

	CH _{4(g)}	2 O _{2(g)}	2 H ₂ O _(g)	CO _{2(g)}	N _{2(g)}
$t = 0$	n_i	$2n_i$	0	0	$4 \times 2n_i$
t_f	$n_i - \xi_f = 0$	0	$2\xi_f = 2n_i$	$\xi_f = n_i$	$8n_i$

L'énergie libérée par cette réaction est $\Delta H_1^0 = \xi_f \times \Delta_r H^0 = n_i \times \Delta_r H^0$.

L'échauffement de la composition du système présent en fin de réaction correspond à :

$$\Delta H_2^0 = \sum_j n_j C_{p,nj} (T_f - T_i) = \left(2n_i C_{p,n}(\text{H}_2\text{O}(\text{g})) + n_i C_{p,n}(\text{CO}_2(\text{g})) + 8n_i C_{p,n}(\text{N}_2(\text{g})) \right) (T_f - T_i)$$

Finalement,

$$\Delta H_1^0 + \Delta H_2^0 = 0 \Leftrightarrow T_f = T_i - \frac{\Delta_r H^0}{2C_{p,n}(\text{H}_2\text{O}(\text{g})) + C_{p,n}(\text{CO}_2(\text{g})) + 8C_{p,n}(\text{N}_2(\text{g}))}$$

Application numérique :

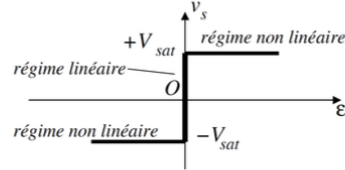
$$T_f = 293 - \frac{-802,5 \cdot 10^3}{2 \times 37,6 + 45,4 + 8 \times 30,1} = 2513 \text{ K} = 2240^\circ\text{C}$$

Partie B – Avant le départ

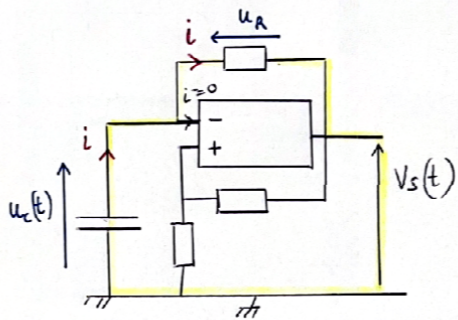
Q12. L'ALI idéal de gain infini, comme son nom l'indique, possède un gain statique A_0 considéré infini. En ce sens, puisque $V_s = A_0 \varepsilon = A_0(V^+ - V^-)$, on a ε qui tend vers 0 et donc $V^+ = V^-$ en régime linéaire.

Par ailleurs on considère dans le cas « idéal » les courants d'entrée nuls puisque l'impédance d'entrée est considérée infinie. L'impédance de sortie est considérée nulle.

Caractéristique :



Q13. On considère que $i^+ = i^- = 0$ soit $i_R = i_C = i$.



La loi des mailles dans la maille en jaune donne :

$$u_c(t) - u_R - V_s(t) = 0 \text{ avec } u_R = Ri(t) \text{ et } i(t) = -C \frac{du_c(t)}{dt} \text{ en convention générateur !}$$

On en déduit :

$$u_c(t) - Ri(t) = V_s(t) \Leftrightarrow u_c(t) + RC \frac{du_c(t)}{dt} = V_s(t) \Leftrightarrow \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_c(t) = \frac{V_s(t)}{RC}$$

Lorsque l'on ferme l'interrupteur, $V_s(t = 0^+) = +V_{sat}$, soit l'équation différentielle :

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_c(t) = \frac{V_{sat}}{RC} \text{ et on pose } \tau = RC$$

Q14. L'ALI fonctionne en régime saturé, soit :

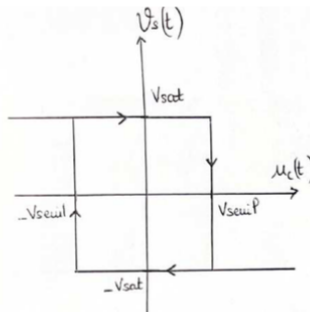
- Pour $V_s = +V_{sat}$ on a $V^+ > V^- \Rightarrow \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} V_{sat} > u_c(t)$
- Pour $V_s = -V_{sat}$ on a $V^+ < V^- \Rightarrow -\frac{R_2}{(R_1 + R_2)} V_{sat} < u_c(t)$

Qui donne la caractéristique ci-contre, en posant :

$$\pm V_{seuil} = \pm \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} V_{sat}$$

Par ailleurs, la solution l'équation différentielle portant sur $u_c(t)$ s'écrit :

$$u_c(t) = k \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + V_{sat}$$



Le condensateur étant initialement déchargé, et la tension à ses bornes étant continue, on a :

$$u_c(t = 0^-) = u_c(t = 0^+) \Rightarrow 0 = k + V_{sat} \Leftrightarrow k = -V_{sat}$$

Soit finalement, pour $0 \leq t \leq t_1$:

$$u_c(t) = V_{sat} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

On en déduit donc que $u_c(t)$ est une fonction croissante jusqu'à $t = t_1$, lorsque $u_c(t)$ atteint la valeur V_{seuil} , qui correspond au basculement de V_s à $-V_{sat}$.

$$\begin{aligned} u_c(t_1) &= \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} V_{sat} = V_{sat} \left(1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right)\right) \\ \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) &= 1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \Leftrightarrow t_1 &= RC \ln\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \end{aligned}$$

Q15. On a à présent $V_s(t_1) = -V_{sat}$. L'équation différentielle devient :

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c(t) = -\frac{V_{sat}}{\tau}$$

La solution est donc :

$$u_c(t) = k' \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - V_{sat}$$

La nouvelle condition « initiale » s'écrit : $u_c(t_1) = V_{seuil} = R_2 V_{sat} / (R_1 + R_2)$, soit :

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{sat} = k' \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) - V_{sat} \Leftrightarrow k' = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} + 1\right) V_{sat} \exp\left(\frac{t_1}{\tau}\right) = \left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1 + R_2}\right) V_{sat} \exp\left(\frac{t_1}{\tau}\right)$$

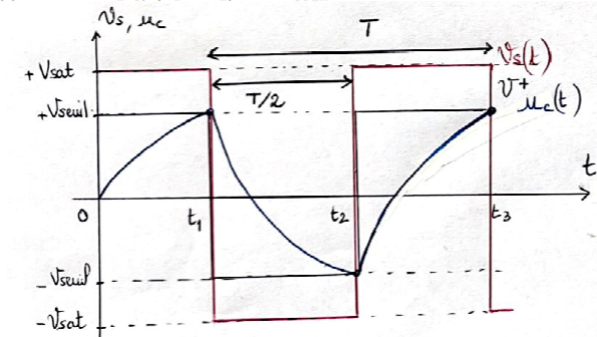
Finalement la solution, valable pour $t_1 \leq t \leq t_2$, est :

$$u_c(t) = V_{sat} \left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1 + R_2}\right) \exp\left(-\frac{(t - t_1)}{\tau}\right) - 1$$

C'est une fonction décroissante : $u_c(t)$ diminue jusqu'à $t = t_2$ où V_s bascule à nouveau à $+V_{sat}$ lorsque $u_c(t_2) = -V_{seuil}$. Soit :

$$\begin{aligned} u_c(t_2) = -V_{seuil} &\Leftrightarrow -\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{sat} = V_{sat} \left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1 + R_2}\right) \exp\left(-\frac{(t_2 - t_1)}{\tau}\right) - 1 \\ \Leftrightarrow -\frac{R_2}{R_1 + R_2} + 1 &= \left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1 + R_2}\right) \exp\left(-\frac{(t_2 - t_1)}{\tau}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{R_1}{R_1 + R_2} &= \left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1 + R_2}\right) \exp\left(-\frac{(t_2 - t_1)}{\tau}\right) \\ \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{(t_2 - t_1)}{\tau}\right) &= \frac{R_1}{2R_2 + R_1} \\ \Leftrightarrow t_2 - t_1 &= -RC \ln\left(\frac{R_1}{2R_2 + R_1}\right) \\ \Leftrightarrow t_2 &= t_1 + RC \ln\left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1}\right) = t_1 + RC \ln\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) \text{ CQFD.} \end{aligned}$$

Q16. Tracé de $V_s(t)$, $u_c(t)$ et $V^+ = R_2 V_s / (R_1 + R_2) = \pm V_{seuil}$



Q17. La période correspond à $T = 2(t_2 - t_1)$, soit :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2RC \ln\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right)} = \mathbf{1,049 \text{ Hz}}$$

Q18. Les impédances de deux condensateurs s'additionnent lorsque les condensateurs sont **placés en série** :

$$Z_{C,eq} = Z_{C1} + Z_{C2} = \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega} = \frac{jC_1\omega + jC_2\omega}{jC_1\omega jC_2\omega} = \frac{1}{j\omega} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) = \frac{1}{j\omega C_{eq}}$$

Par identification : $C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ et pour $C_1 = C_2 = C$ on a $C_{eq} = \frac{C}{2}$

Avec deux condensateurs de capacité 1,000 μF placés en série on peut donc obtenir une capacité équivalente de 500,0 nF.

Q19. Les expérimentateurs obtiennent des valeurs différentes à cause de différentes sources d'incertitudes :

- Incertitudes sur les valeurs des composants (voir données constructeur)
- Incertitude sur l'appareil de mesure de la fréquence
- Incertitude de l'expérimentateur lors de la mesure (position des curseurs si utilisation de l'oscilloscope,...)

Il y a $N = 15$ mesures effectuées, l'incertitude-type s'écrit :

$$u(f) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{0,025}{\sqrt{15}} = \mathbf{0,0065 \text{ Hz}}$$

On peut retenir $u(f) = \mathbf{0,007 \text{ Hz}}$ pour une présentation du résultat.

Ecart normalisé (Z-score) :

$$Z = \frac{|f - \bar{f}|}{u(f)} = \frac{|1,049 - 1,053|}{0,0065} = \mathbf{0,62 < 2}$$

Le Z-score est inférieur à 2, les mesures sont donc compatibles.

Q20. En branchant la diode à la sortie, la tension aux bornes de la diode est $V_s(t)$. Elle est donc alternativement positive ou négative et peut éventuellement clignoter à la période T d'environ 1 seconde.

Calculons le courant nécessaire pour la diode :

$$P = UI \Leftrightarrow I = \frac{P}{U} = \frac{U}{V_{sat}} = \frac{25}{14} = \mathbf{1,79 \text{ A}}$$

Le courant nécessaire est bien supérieur à l'intensité du courant en sortie de l'ALI (25 mA). **Ce montage seul ne permet donc pas le clignotement de la lampe.**

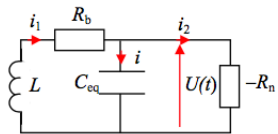
Partie 2 – Détection par boucle inductive – Centrale PSI 2007

I.B.1) Les impédances d'entrée sont infinies donc $V_- - V_s = RI$ et $V_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s$ d'après le théorème du diviseur de tension. On remarque que $V = V_-$.

L'A.Op fonctionne en régime linéaire. Dans le modèle parfait, cela se traduit par $V_+ = V_-$ soit ici $V_s + RI = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s$ d'où $V_s = -R \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) I$ puis $V = -R \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) I + RI$ soit $V = -R \frac{R_1}{R_2} I$.

I.C.1) Les deux condensateurs sont associés en parallèle. La capacité équivalente de l'association est $C_{eq} = C_b + C_s$.

I.C.2) Le schéma équivalent de l'oscillateur est le suivant :



page 1/12??

Avec les orientations indiquées, on peut écrire :

$$U(t) = -R_n i_2(t) ; U(t) = -R_b i_1(t) - L \frac{di_1(t)}{dt} \text{ et } i(t) = C_{eq} \frac{dU(t)}{dt}. \text{ La loi des nœuds } i_1 = i + i_2$$

conduit ensuite à :

$$U(t) = -R_b \left(C_{eq} \frac{dU(t)}{dt} - \frac{U(t)}{R_n} \right) - L \frac{d}{dt} \left(C_{eq} \frac{dU(t)}{dt} - \frac{U(t)}{R_n} \right) = -R_b C_{eq} \frac{dU(t)}{dt} + \frac{R_b}{R_n} U(t) - LC_{eq} \frac{d^2 U(t)}{dt^2} + \frac{L}{R_n} \frac{dU(t)}{dt}$$

$$\text{soit } LC_{eq} \frac{d^2 U(t)}{dt^2} + \left(R_b C_{eq} - \frac{L}{R_n} \right) \frac{dU(t)}{dt} + \left(1 - \frac{R_b}{R_n} \right) U(t) = 0 \text{ qui est bien de la forme demandée en}$$

$$\text{posant } a = LC_{eq}, b = R_b C_{eq} - \frac{L}{R_n} \text{ et } c = \frac{R_b}{R_n}.$$

I.C.3) La solution peut être sinusoïdale si le coefficient du terme d'ordre un dans l'équation différentielle est nul soit $b = 0$. On en déduit $R_n = \frac{L}{R_b C_{eq}}$ ou encore $R_n = R_b Q^2$.

I.C.4) Si la condition précédente est vérifiée, la solution de l'équation différentielle est sinusoïdale si le coefficient du terme d'ordre zéro est positif soit $\frac{R_b}{R_n} < 1$ ou encore $Q^2 > 1$. On a donc

$$Q_{lim} = 1.$$

$$\text{I.C.5) Si cette condition est vérifiée, la fréquence des oscillations est alors } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1-c}{a}}$$

$$\text{soit } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{Q^2}}{LC_{eq}}}.$$

Partie IV Étude du fréquencesmètre

I.C.6) En prenant $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{eq}}}$, on commet une erreur relative $\frac{\Delta f}{f} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}$ soit nu-

mériquement $\frac{\Delta f}{f} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{64}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{64}}} = 8 \times 10^{-3}$ pour $Q = 8$, soit une erreur relative de 0,8%.

I.C.7) On a $C_{eq} = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L}$ soit numériquement $C_{eq} = \frac{1}{4\pi^2 (50 \times 10^3)^2 (150 \times 10^{-6})} = 68 \text{ nF}$. Il faut donc choisir $C_s = 58 \text{ nF}$.

On trouve alors $Q = \frac{1}{0,7} \sqrt{\frac{150 \times 10^{-6}}{68 \times 10^{-9}}} = 67$. On a bien $Q > Q_{lim, recommandée}$.

I.C.8) On ne peut obtenir exactement $b = 0$. Pour que des pseudo oscillations s'amorcent sans s'amortir, il faut que le système soit instable, ce qui se traduit par trois coefficients de l'équation différentielle de signe contraire. Comme $a > 0$ et $1 - c > 0$, il faut donc $b < 0$ soit $R_n < \frac{L}{R_b C_{eq}}$ ou encore $R_n < Q^2 R_b$.

I.C.9) Le fonctionnement étudié ci-dessus correspond au fonctionnement linéaire de l'A.Op. Il n'est donc possible que si $V \in [-V_0, V_0]$. Lorsque V atteint une des valeurs bornes de ce domaine, l'A.Op est saturé et l'analyse du système change. On montre que le fonctionnement en saturation n'est pas stable et l'A.Op revient en fonctionnement linéaire. Le régime établi de l'oscillateur est donc une suite périodique de fonctionnements instables de l'A.Op, alternativement linéaires et saturés. L'amplitude maximale de ces oscillations est V_0 .

IV.A.1) Comme $i_s = 0$, on a $i = C' \frac{d}{dt}(e'(t) - V(t))$ et $V(t) = R'i + V_0$. On en déduit

$$\frac{V(t) - V_0}{R'} = C' \frac{d}{dt}(e'(t) - V(t)) \text{ d'où } \frac{dV(t)}{dt} + \frac{V(t)}{R'C'} = \frac{de'(t)}{dt} + \frac{V_0}{R'C'}.$$

IV.A.2) Pour $t < 0$, e' est constant comme V_0 . Donc il s'est établi un régime constant. La présence du condensateur assure la nullité du courant constant. On a donc $V = V_0$ pour $t < 0$.

La tension aux bornes du condensateur est une grandeur continue quel que soit t , en particulier $t = 0$. On a $V_C = e' - V$ donc, pour $t < 0$, on trouve $V_C = E - V_0$. Comme $V_C(t = 0^+) = V_C(t = 0^-)$, on obtient $-E - V(t = 0^+) = E - V_0$ d'où $V(t = 0^+) = V_0 - 2E$.

Comme $0 < V_0 < 2E$ par hypothèse, on a $V(t = 0^+) < 0$.

IV.A.3) Comme e' est constant pour $t > 0$, l'équation différentielle se réduit à $\frac{dV(t)}{dt} + \frac{V(t)}{R'C'} = \frac{V_0}{R'C'}$ dont la solution générale est $V(t) = V_0 + ae^{-\frac{t}{\tau}}$ en posant $\tau = R'C'$.

La condition initiale se traduit par $V(t = 0^+) = V_0 + a$ d'où

$a = -2E$. On obtient donc $V(t) = V_0 - 2Ee^{-\frac{t}{\tau}}$.

IV.A.4) On en déduit le graphe suivant :

IV.B) L'impédance d'entrée de l'A.Op est infinie donc $V_+(t) = e(t)$. Par construction, $V_- = 0$. L'A.Op n'est pas bouclé sur son entrée inverseuse donc il fonctionne en régime saturé.

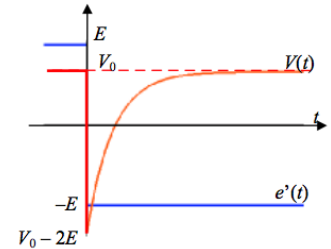
On a $e'(t) = +V_{sat}$ tant que $V_+ - V_- > 0$ soit tant que $e(t) > 0$.

On a $e'(t) = -V_{sat}$ tant que $V_+ - V_- < 0$ soit tant que $e(t) < 0$.

Comme la fréquence de $e(t)$ vérifie $f \ll \frac{1}{R'C'}$ soit $\tau \ll T$ (période du signal sinusoïdal), on peut considérer que le régime constant a le temps de s'établir entre deux bascules de l'A.Op.

La bascule $+V_{sat} \rightarrow -V_{sat}$ correspond à celle étudiée à la question précédente en remplaçant E par V_{sat} . (La condition $0 < V_0 < 2V_{sat}$ est supposée vérifiée par hypothèse).

Prenons comme nouvelle instant origine une bascule $-V_{sat} \rightarrow +V_{sat}$ de l'A.Op. On a donc $e' = -V_{sat}$ et $V = V_0$ pour $t = 0^-$. On en déduit $V_C(0^-) = -V_{sat} - V_0$. La continuité de V_C entraîne



$V_C(0^+) = V_{\text{sat}} - V(t=0^+) = -V_{\text{sat}} - V_0$. On en déduit $V(t=0^+) = V_0 + 2V_{\text{sat}}$ et la solution de l'équation différentielle s'écrit $V(t) = V_0 + 2V_{\text{sat}}e^{-\frac{t}{\tau}}$.

On en déduit les chronogrammes ci-contre :

IV.C.1) L'A.Op n'est pas bouclé sur son entrée inverseuse donc il ne fonctionne pas en régime linéaire.

IV.C.2) D'après la question précédente, la tension de sortie de l'A.Op est constante. Le condensateur est chargé donc il n'y a pas de courant dans sa branche. Comme l'impédance de l'entrée + est infinie, le courant circulant dans la résistance est nul donc $V_+(t=0^+) = 0$.

Pour $t < 0$, $V_+(t=0^-) = U(t=0^-) = V_0$ donc $V_+(t=0^-) - V_-(t=0^-) < 0$. On en déduit que $S(t=0^-) = -V_{\text{sat}}$.

IV.C.3) Lorsque V_- passe à la valeur $V_0 - 2V_{\text{sat}} < 0$, on peut supposer que $V_+ - V_-$ devient positif donc l'A.Op bascule en saturation haute.

La tension aux bornes du condensateur est continue donc

$$V_+(t=0^-) - S(t=0^-) = V_+(t=0^+) - S(t=0^+)$$

soit $0 - (-V_{\text{sat}}) = V_+(t=0^+) - (V_{\text{sat}})$. On en déduit $V_+(t=0^+) = 2V_{\text{sat}}$.

On vérifie que $V_+(t=0^+) - V_-(t=0^+) = (2V_{\text{sat}}) - (V_0 - 2V_{\text{sat}}) = 4V_{\text{sat}} - V_0 > 0$: l'A.Op bascule effectivement.

IV.C.4) La tension V_+ ne varie pratiquement pas pendant la durée τ donc $V_+(t=\tau^-) = 2V_{\text{sat}}$. À l'instant $t = \tau$, V_- passe à la valeur V_0 . Comme $V_0 < 2V_{\text{sat}}$, on peut supposer que $V_+ - V_-$ reste positif donc l'A.Op ne bascule pas.

Si c'est le cas, la continuité de la tension aux bornes du condensateur conduit à $V_+(t=\tau^+) = 2V_{\text{sat}}$. On a bien $V_+(t=\tau^+) - V_-(t=\tau^+) > 0$. L'hypothèse est vérifiée : **l'A.Op ne bascule pas entre $t = \tau^-$ et $t = \tau^+$** .

IV.C.5-a) Comme $i_+ = 0$, on peut écrire $C \frac{d}{dt}(S(t) - V_+(t)) = \frac{V_+(t) - 0}{R}$ d'où $\frac{dV_+(t)}{dt} + \frac{V_+(t)}{RC} = \frac{dS(t)}{dt}$. Comme $S = -V_{\text{sat}}$, l'équation devient $\frac{dV_+(t)}{dt} + \frac{V_+(t)}{RC} = 0$ dont la solution est $V_+(t) = 2V_{\text{sat}}e^{-\frac{t}{RC}}$ compte tenu de la condition initiale en $t = 0^+$.

b) L'A.Op bascule en saturation basse lorsque $V_+ = V_- = V_0$. Comme $\lim_{t \rightarrow \infty} V_+(t) = 0$, cela est possible à l'instant t_1 tel que $2V_{\text{sat}}e^{-\frac{t_1}{RC}} = V_0$ soit $t_1 = RC \ln\left(\frac{2V_{\text{sat}}}{V_0}\right)$.

La continuité de la tension aux bornes du condensateur se traduit par

$$V_+(t=t_1^-) - S(t=t_1^-) = V_+(t=t_1^+) - S(t=t_1^+)$$

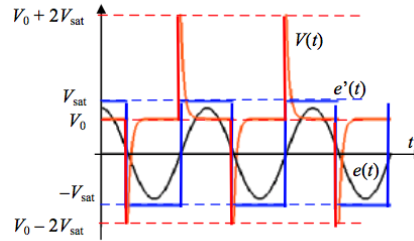
soit $V_0 - V_{\text{sat}} = V_+(t=t_1^+) - (-V_{\text{sat}})$ d'où $V_+(t=t_1^+) = -2V_{\text{sat}}$.

IV.C.6-a) On a vu que l'A.Op bascule à l'instant t_1 . Comme S est constant, l'équation différentielle vérifiée par $V_+(t)$ est toujours $\frac{dV_+(t)}{dt} + \frac{V_+(t)}{RC} = 0$ dont la solution est $V_+(t) = -2V_{\text{sat}}e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$ compte tenu de la condition initiale en $t = t_1^+$.

b) En $t = T/2$, V_- passe à la valeur $V_0 + 2V_{\text{sat}}$. Comme V_+ est négatif, $V_+ - V_-$ reste négatif donc l'A.Op reste en saturation basse.

IV.C.7) Les chronogrammes sont dessinés ci-dessous :

On peut dire que l'état stable du montage est tel que $S = -V_{\text{sat}}$. Il reste dans cet état tant qu'une impulsion négative n'est pas appliquée à l'entrée inverseur du premier A.Op. Une fois bas-



culé dans l'état $S = +V_{\text{sat}}$, il n'y reste que pendant la durée t_1 définie par les caractéristiques du montage (R, C, V_0) et non par celles du signal entrant $U(t)$. Cet état de fonctionnement n'est donc pas stable. On a donc affaire à un montage monostable.

IV.C.8) On a vu que la bascule dans l'état instable se produit lorsque $V_+ - V_-$ devient négatif, alors que $V_+ = 0$ donc dès que V_- devient positif, quelle que soit la forme de $V_-(t)$. La tension $V(t)$ générée par le module d'entrée convient donc aussi.

IV.D.1) Dans la partie IV.C, on a supposé $\tau \ll RC$ où τ est la durée de l'impulsion et $RC \ll T$ pour assurer le retour de V_+ à la valeur nulle avant l'arrivée du front descendant de $V_-(t)$.

Or, d'après la partie IV.B, la durée de l'impulsion est de l'ordre de $R'C'$. On doit donc avoir $R'C' \ll RC \ll T$.

IV.D.2) On obtient les cinq chronogrammes suivants :

La bascule du monostable se fait sur un front descendant du signal $e(t)$, lorsque celui-ci s'annule.

IV.D.3) La valeur moyenne d'un signal correspond à sa composante continue. On utilise un voltmètre DC pour mesurer $\langle S \rangle$.

IV.D.4) On remarque que l'expression donnée de t_0 correspond à celle de t_1 .

$S(t)$ vaut $-V_{\text{sat}}$ sur la durée $T - t_0$ et $+V_{\text{sat}}$ sur la durée t_0 donc on a $\langle S \rangle = \frac{1}{T}(-V_{\text{sat}}(T - t_0) + V_{\text{sat}}t_0)$. On en déduit $f = \frac{1}{2t_0} \left(1 + \frac{\langle S \rangle}{V_{\text{sat}}} \right)$.

IV.E.1) On veut $f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC_{\text{eq}}}}$ si $\langle S \rangle = 0$. Il faut donc $t_0 = \pi \sqrt{LC_{\text{eq}}}$.

IV.E.2) En différenciant logarithmiquement, on obtient $\frac{df}{f} = -\frac{1}{2} \frac{dL}{L}$ d'où $\frac{\Delta f}{f_{\text{sans}}} = \frac{1}{2} S_{\text{boucle}}$.

IV.E.3) L'expression de f obtenue en IV.D.4 s'écrit $f = f_{\text{sans}} \left(1 + \frac{\langle S \rangle_{\text{veh}}}{V_{\text{sat}}} \right)$ et conduit à

$\frac{\Delta f}{f_{\text{sans}}} = \frac{\langle S \rangle_{\text{veh}}}{V_{\text{sat}}}$. En identifiant, il reste $\langle S \rangle_{\text{veh}} = \frac{1}{2} S_{\text{boucle}} V_{\text{sat}}$.

IV.E.4) Il y a détection du véhicule si $\langle S \rangle > \frac{1}{2} \langle S \rangle_{\text{veh}}$.

A.N. $\langle S \rangle_{\text{seuil}} = \frac{1}{4} (8 \times 10^{-2})(12) = 240 \text{ mV}$. Cette valeur est facilement mesurable.

