Sujet CCINP 2023 PC - Modélisation

…actéristiques d'un matériau biosourcé : le Kairlin®

Partie I - Contexte de l'étude

Source : https://www.kairos-jourdain.com/fr/environnement/kairlin

Véritable révolution dans le domaine des matériaux, les composites offrent de nombreux avantages comparativement aux matériaux standards : performances mécaniques supérieures, faible masse volumique ou durée de vie améliorée... Ces avantages sont obtenus grâce à leur structure composée d'un renfort, constituant l'ossature, et d'une matrice ou résine, assurant la cohésion du matériau.

Issu du bureau d'étude de l'entreprise Kaïros, le Kairlin® (**figure 1)**, est un matériau bio-composite conçu à partir de fibres de lin et de composants 100 % végétaux destiné à la construction de voiliers de course. Le respect de l'environnement a été l'un des principaux critères considéré lors du développement du produit. Désireux d'élargir son offre et de permettre l'emploi du Kairlin® au plus grand nombre, Kaïros envisage d'élargir son usage à l'industrie du bâtiment comme isolant thermique et phonique.

Ce sujet vise ainsi à déterminer quelle devra être l'épaisseur minimum du composite permettant de garantir des performances acoustique et thermique conformes aux recommandations du gouvernement pour les usages du génie civil. Il conviendra ensuite d'en déduire son énergie grise volumique, reflet de l'impact environnemental d'un matériau.

Figure 1 - Le Kairlin®, un composite biosourcé

Partie II - Étude des performances thermiques

La performance thermique est un critère essentiel dans le choix de tout isolant. En effet, ce paramètre influence directement l'énergie dissipée à travers les parois du bâtiment et est donc lié à l'énergie supplémentaire que l'on doit fournir au bâtiment pour maintenir une température donnée.

II.1 - Étude analytique du régime permanent

On s'intéresse tout d'abord aux transferts thermiques dans le composite (**figure 2)** lorsque la température intérieure $\mathrm{T(t, x = 0) = T_{int}} = 20$ °C et la température extérieure $T(t, x = L) = T_{ext} = 5$ °C. On supposera ces températures constantes et uniformes sur toute la surface de la paroi. On souhaite étudier l'évolution de la température dans le mur, en supposant que le matériau est homogène d'un point de vue thermique et que sa température est à $T(t = 0, x > 0) = T_{ext}$.

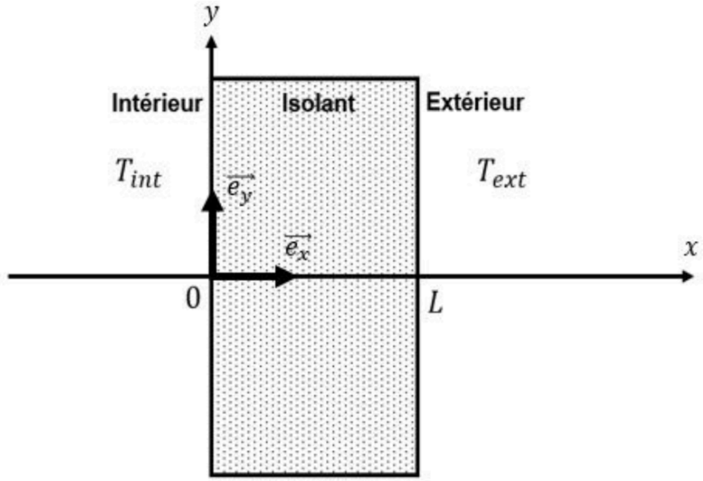

Figure 2 - Schématisation du problème

Q1. Quelles hypothèses sont faites pour se ramener à une modélisation unidimensionnelle suivant x ?

Q2. Donner, sans démontrer, l'équation de la diffusion thermique en régime non permanent et en l'absence de source interne. On notera T la température, $\lambda_{isolant}$ la conductivité thermique de l'isolant, ρ la masse volumique et c_p la chaleur spécifique à pression constante, i.e. la capacité thermique massique. La simplifier en prenant en compte l'hypothèse de la **question Q1**.

Q3. Donner les conditions aux limites, $T(t > 0, x = 0)$ et $T(t, x = L)$, et les conditions initiales $T(t = 0, x > 0)$ et $T(t = 0, x = 0)$ de la fonction $T(t, x)$.

Q4. Déterminer l'expression de la température en régime permanent $T(x)$ en fonction des variables x, T_{ext}, T_{int} et L.

Q5. Proposer une définition de la résistance thermique et en donner la formule. En déduire l'expression de la résistance thermique surfacique r_{th} de l'isolant en fonction de l'épaisseur L de la plaque et de la conductivité thermique de l'isolant $\lambda_{isolant}$.

Q6. Quelle doit être la valeur de l'épaisseur du composite pour obtenir une résistance thermique surfacique de $r_{th} = 3{,}15\ \mathrm{m^2 \cdot K \cdot W^{-1}}$? On prendra $\lambda_{isolant} = 0{,}037\ \mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}$.

II.2 - Étude numérique du régime transitoire

On cherche à résoudre numériquement l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_{th}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) \text{ où } k_{th} \text{ est une constante.}$$

Q7. Exprimer la diffusivité thermique k_{th} en fonction de la conductivité thermique $\lambda_{isolant}$, de la masse volumique ρ et de la chaleur spécifique massique à pression constante c_p.

On discrétise l'intervalle $[0, L]$, représentant l'épaisseur de l'isolant, en $N\_X + 1$ points régulièrement espacés d'un pas spatial dx (**figure 3**). On souhaite déterminer la température en chacun de ces points.

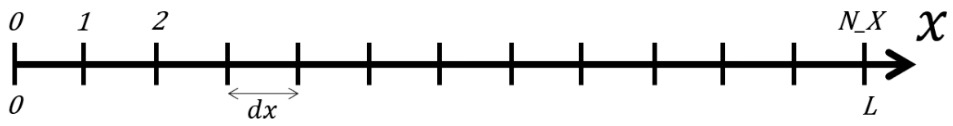

Figure 3 - Discrétisation de l'isolant selon x

Q8. Donner le nombre d'intervalles spatiaux dans l'intervalle $[0, L]$. Donner l'expression de dx en fonction des données du problème. En déduire l'abscisse x_i du (i)-ème point.

Q9. À l'aide de la formule de Taylor-Young, **équation (1)**, exprimer :

- **a.** $T(t + dt, x)$, au premier ordre par rapport à t, dt étant l'incrément temporel ;
- **b.** $T(t, x - dx)$, au second ordre par rapport à x ;
- **c.** $T(t, x + dx)$, au second ordre par rapport à x.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + o((x-a)^2) \qquad \textbf{(1)}$$

Q10. En déduire une expression de $\dfrac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2}$ en fonction de dx, $T(t, x)$, $T(t, x - dx)$ et $T(t, x + dx)$.

La température à l'abscisse x_i à une date t_n sera notée : T_i^n.

Q11. En reformulant le résultat des **questions Q9** et **Q10**, déterminer une relation entre :

- **a.** T_i^{n+1}, T_i^n, $\dfrac{\partial T(t,x)}{\partial t}$ et dt ;
- **b.** T_{i+1}^n, T_{i-1}^n, T_i^n, $\dfrac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2}$ et dx.

Q12. À partir des **questions Q2** et **Q11**, montrer que :

$$T_i^{n+1} = dt.\, k_{th}\left(\frac{T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n}{(dx)^2}\right) + T_i^n. \qquad \textbf{(2)}$$

Le code de l'**algorithme 1** permet de déterminer les valeurs de température aux points de discrétisation. Dans les questions suivantes, on cherchera à compléter les instructions manquantes.

Q13. Donner l'`Instruction 1` permettant de définir la diffusivité thermique k_{th}.

Q14. L'**équation (2)** est-elle valable pour toute valeur de $i \in \{0 \dots N\_X\}$?

Q15. Définir les incréments de temps et d'espace en précisant les `Instruction 2.1` et `Instruction 2.2`. N_t intervalles seront réalisés dans l'intervalle de temps $[0; t\_max]$.

Q16. Déduire de la **question Q3** les `Instruction 3.1`, `Instruction 3.2`, `Instruction 3.3` et `Instruction 3.4`.

Q17. À partir de la **question Q12**, compléter `Instructions 4.1`, `Instructions 4.2` et `Instructions 4.3`.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Données du problème
Lambda = 0.037
Cp = 1500
Rho = 1.325
L = 1        #Epaisseur de l'isolant
t_max = 20000     #Temps de fin d'intégration en secondes
N_t = 100      #Nombre d'intervalles dans le temps
N_X = 5       #Nombre d'intervalles dans l'espace
T_int = 20
T_ext = 5
K = [Instruction 1]       #Diffusivité thermique

#Discrétisation de l'espace et du temps
dx = [Instruction 2.1]
dt = [Instruction 2.2]
Temp = np.zeros((N_t+1, N_X+1))

#Initialisation de la température
#Conditions initiales
Temp[0,0]=[Instruction 3.1]

for i in range(1,N_X+1):
    [Instruction 3.2]

#Conditions aux limites
for n in range(1,N_t+1):
    [Instruction 3.3]
    [Instruction 3.4]


#Calcul des températures aux différents instants
for n in [Instruction 4.1]:
    for i in [Instruction 4.2]:
        [Instruction 4.3]
```

Algorithme 1 - Algorithme permettant d'obtenir le profil de température à différents instants

On donne en **figure 4** le profil de température dans le composite à plusieurs instants.

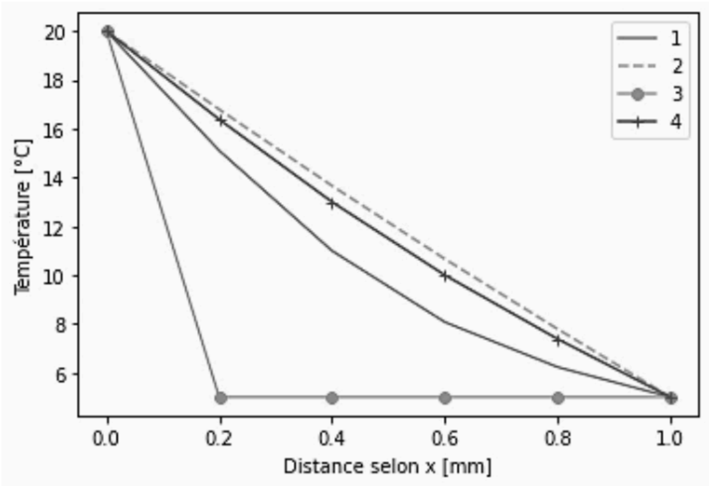

Figure 4 - Évolution de la température dans le composite à plusieurs instants

Q18. Associer à chaque courbe de la **figure 4** les instants de la liste suivante :

$$t = [0\ s, 6\ 000\ s, 12\ 000\ s, 18\ 000\ s].$$

Q19. Le régime permanent est-il atteint ? Justifier.

ANNEXE

Quelques commandes utiles en langage Python

I. - Bibliothèque NUMPY

Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque **`numpy`** a préalablement été importée à l'aide de la commande : **`import numpy as np`**.

On peut alors utiliser les fonctions de la bibliothèque, dont voici quelques exemples :

- **`np.linspace(start, stop, N_point) :`**
  - description : renvoie un nombre d'échantillons espacés uniformément, calculés sur l'intervalle [start, stop]
  - argument d'entrée : début, fin et nombre d'échantillons dans l'intervalle
  - argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
`np.linspace(1, 4, 5)`	`[1., 1.75, 2.5, 3.25, 4.]`

- **`np.zeros(i) :`**
  - description : renvoie un tableau de taille i rempli de zéros.
  - argument d'entrée : un scalaire
  - argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
`np.zeros(5)`	`[0, 0, 0, 0, 0]`

- **`np.array(liste) :`**
  - description : crée une matrice (de type tableau) à partir d'une liste.
  - argument d'entrée : une liste définissant un tableau à 1 dimension (vecteur) ou 2 dimensions (matrice)
  - argument de sortie : un tableau (matrice)

Commande	Résultat
`np.array([4, 3, 5])`	`[4, 3, 5]`

- **`A[i,j] :`**
  - description : retourne l'élément (i + 1, j + 1) de la matrice A. Pour accéder à l'intégralité de la ligne i + 1 de la matrice A, on écrit A[i, :]. De même, pour obtenir toute la colonne j + 1 de la matrice A, on utilise la syntaxe A[: , j]
  - argument d'entrée : une liste contenant les coordonnées de l'élément dans le tableau A
  - argument de sortie : l'élément (i + 1, j + 1) de la matrice A

Commande	Résultat
`A = np.array([[1, 2, 1],[4, 6, 3], [1, 3, 8]])` `A[1, 2]`	3

- **`chaine.split(motif) :`**
    - description : divise une chaîne de caractères en une liste ordonnée de sous-chaînes, place ces sous-chaînes dans un tableau et retourne le tableau. La division est effectuée en recherchant un motif
    - argument d'entrée : motif
    - argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
`A = 'azert yuiop'` `A.split(' ')`	`['azert', 'yuiop']`

II. - Bibliothèque MATPLOTLIB.PYPLOT

Cette bibliothèque permet de tracer des graphiques. Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque `matplotlib.pyplot` a préalablement été importée à l'aide de la commande : `import matplotlib.pyplot as plt`.

- description : fonction permettant de tracer un graphique de n points dont les abscisses sont contenues dans le vecteur x et les ordonnées dans le vecteur y. Cette fonction doit être suivie de la fonction `plt.show()` pour que le graphique soit affiché
- argument d'entrée : un vecteur d'abscisses x (tableau de n éléments) et un vecteur d'ordonnées y (tableau de n éléments). La chaîne de caractères 'SC' précise le style et la couleur de la courbe tracée. Des valeurs possibles pour ces deux critères sont :

Valeurs possibles pour S (style) :

Description	Ligne continue	Ligne traitillée	Marqueur rond	Marqueur plus
Symbole S	-	- -	o	+

Valeurs possibles pour C (couleur) :

Description	bleu	rouge	vert	noir
Symbole C	b	r	g	k

- argument de sortie : un graphique

```
x= np.linspace(3,25,5)
y=sin(x)
plt.plot(x,y,'-b') # tracé d'une ligne bleue continue
plt.title('titre_graphique') # titre du graphe
plt.xlabel('x') # titre de l'axe des abscisses
plt.ylabel('y') # titre de l'axe des ordonnées
plt.show()
```