

## DS de Physique 12 novembre 2025 - PSI

### Difficulté supérieure Physique Chimie

Durée 4H - Calculatrices autorisées

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

### Partie 1 – Le feu à la cathédrale Notre Dame

Le 15 avril 2019, un violent incendie s'est déclaré dans la cathédrale de Notre-Dame de Paris. La charpente constituée de milliers de poutres provenant de chênes centenaires a entièrement brûlé, la flèche réalisée en plomb s'est effondrée et la structure a été endommagée. Ce sujet traite quelques points concernant cet incendie.

#### I.B – Combustion du bois

Un solide, en particulier le bois, passe par plusieurs phases au cours de son échauffement avant de brûler, avec apparition des flammes. D'abord l'eau qu'il contient s'évapore autour de 100 °C à la pression atmosphérique, puis les constituants du bois commencent à se décomposer ; il s'agit du phénomène de pyrolyse, généralement observé entre 250 °C et 500 °C, qui conduit à la formation de gaz. C'est une partie de l'énergie dégagée par la combustion de ces gaz de pyrolyse dans le dioxygène de l'air qui permet de perpétuer l'ensemble de ces étapes. Lorsque le processus de pyrolyse est terminé et qu'il n'y a plus de substances volatiles, il subsiste un résidu charbonneux rougeoyant qui dégage encore beaucoup d'énergie, sa surface extérieure atteignant 800 °C.

Le bois de chêne est composé principalement d'environ 25 % de lignine ( $C_{40}H_{44}O_6$ ) et 75 % de carbohydrates  $C_n(H_2O)_m$  (cellulose ( $C_6H_{10}O_5$ )<sub>p</sub> et hemicellulose).



Figure 1 Différentes phases de combustion du bois<sup>1</sup>

**Q 5.** Une analyse élémentaire a fourni les pourcentages massiques respectifs en élément carbone, hydrogène et oxygène de 50 %, 6 % et 44 %. Montrer que, si le bois pouvait être considéré comme un corps pur, sa formule chimique serait  $CH_{1,44}O_{0,66}$ .

Dans la suite, on assimilera le bois à un corps pur de formule chimique brute  $CH_{1,44}O_{0,66}$ .

**Q 6.** Écrire l'équation-bilan de la réaction de combustion du bois avec l'oxygène de l'air. La combustion est supposée complète et conduire à la formation de  $CO_2$  et  $H_2O$ .

On appelle pouvoir calorifique inférieur (PCI) l'énergie dégagée par la combustion complète d'un kilogramme de combustible à pression constante, l'eau produite étant sous forme de vapeur.

**Q 7.** Pour le chêne, on mesure un PCI de 19 MJ·kg<sup>-1</sup>. Quelle serait la valeur numérique de l'enthalpie de réaction de cette combustion ?

**Q 8.** En admettant qu'en fin de pyrolyse, les gaz libérés soient pour l'essentiel du dihydrogène  $H_2$  et du monoxyde de carbone CO, retrouver, à partir des données tabulées, la valeur de l'enthalpie standard de réaction de la combustion de ces gaz de pyrolyse dans le dioxygène de l'air. Conclure.

**Q 9.** Dans une pièce calorifugée et fermée, initialement à 20 °C et de capacité thermique totale de l'ordre de  $6,0 \times 10^5 \text{ J·K}^{-1}$ , brûle une bûche de bois de chêne de 1 kg. Quelle est la température maximale atteinte dans la pièce ? Commenter.

## II Le plomb

La toiture de la cathédrale Notre-Dame de Paris contenait du plomb qui a été porté au dessus de la température de formation des oxydes. Ainsi, les fumées de l'incendie ont pris une coloration jaune.

Les données concernant l'élément plomb figurent en annexe.

#### II.A – L'élément plomb – Oxydation du plomb

On supposera que dans le domaine de température étudié, l'enthalpie standard de formation et l'entropie molaire standard sont indépendantes de la température en dehors des changements d'état.

**Q 23.** Le plomb solide cristallise dans un réseau cubique face centrée. Calculer le paramètre de maille  $a$ .

**Q 24.** Lors de l'incendie, la température a dépassé 800 °C. Sous quel(s) état(s) pouvait-on trouver du plomb sur les lieux de l'incendie ?

**Q 25.** Écrire les réactions du dioxygène de l'air sur le plomb solide conduisant aux oxydes  $PbO_{(s)}$ ,  $Pb_3O_{4(s)}$  et  $PbO_{2(s)}$  à température ambiante. On prendra un coefficient stœchiométrique de 1 pour le dioxygène.

**Q 26.** Préciser la valeur du nombre d'oxydation du plomb dans ces oxydes. Commenter la valeur pour  $Pb_3O_{4(s)}$ .

**Q 27.** Calculer la constante d'équilibre à 298 K de la réaction conduisant à  $PbO_{(s)}$  à partir des données thermodynamiques fournies en fin d'énoncé.

**Q 28.** . Quel serait l'effet d'une diminution de la pression en dioxygène à température constante ?

La figure 3 donne les domaines d'existence du plomb et de ses oxydes dans un diagramme  $RT \ln \frac{P_{O_2}}{P^\circ} = f(T)$ .

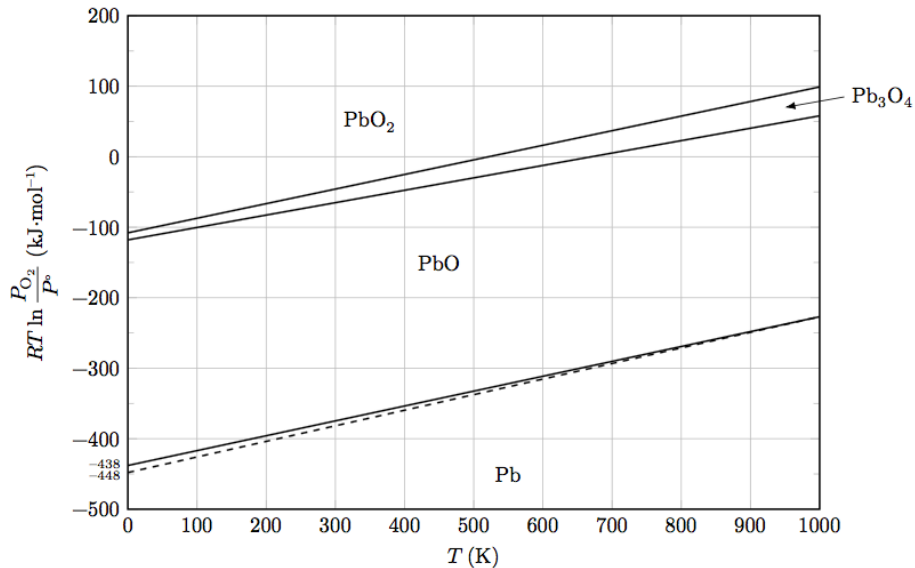


Figure 3 Domaines d'existence

- Q 29. Retrouver la valeur de la constante d'équilibre calculée à la question 27.
- Q 30. Quel(s) composé(s) du plomb peu(ven)t être présent(s) dans un nuage de fumée à température 500 °C ?

Données

Données spécifiques à l'élément plomb et description de quelques oxydes

Numéro atomique	82
Masse molaire	207,2 g·mol <sup>-1</sup>
Masse volumique	11,35 g·cm <sup>-3</sup>
États d'oxydation	2 et 4
Température de fusion	327 °C
Température d'ébullition	1749 °C
Enthalpie molaire de fusion Δ <sub>fus</sub> H°	4,9 kJ·mol <sup>-1</sup>

Type	Couleur	Masse volumique (kg·m <sup>-3</sup> )	Évolution
PbO	jaune (litharge)	9500	décomposition entre 300 °C et 400 °C en Pb <sub>3</sub> O <sub>4</sub>
Pb <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	orange (minium)	9100	fusion et décomposition après 500 °C
PbO <sub>2</sub>	noir	9380	fusion et décomposition à 290 °C en Pb <sub>3</sub> O <sub>4</sub> puis PbO
PbCO <sub>3</sub>	blanc (céruse)		instable au-dessus de 400 °C en PbO, CO et CO <sub>2</sub>

Constantes et conversions de quelques unités

Constante des gaz parfaits	R = 8,31 J·mol <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>
Constante d'Avogadro	N <sub>A</sub> = 6,02 × 10 <sup>23</sup> mol <sup>-1</sup>
Constante de Planck	h = 6,63 × 10 <sup>-34</sup> J·s
Charge élémentaire	e = 1,60 × 10 <sup>-19</sup> C
Accélération normale de la pesanteur terrestre	g = 9,81 m·s <sup>-2</sup>
Le faraday	1 F = 9,65 × 10 <sup>4</sup> C·mol <sup>-1</sup>
La minute d'arc	1' = 1/60°

Données atomiques

Élément	H	C	O	Pb
Numéro atomique	1	6	8	82
Masse molaire (g·mol <sup>-1</sup> )	1,0	12,0	16,0	207,2

Données thermodynamiques et autres caractéristiques

Viscosité dynamique de l'eau (supposée indépendante de la température) : η = 1,0 × 10<sup>-3</sup> Pa·s.

Masses volumiques dans les conditions usuelles de températures et de pression :

eau liquide	1,0 × 10 <sup>3</sup> kg·m <sup>-3</sup>
air	1,2 kg·m <sup>-3</sup>

Capacité thermiques dans les conditions usuelles de températures et de pression (on admet que ces grandeurs ne dépendent pas de la température)

eau liquide	c <sub>P</sub> = 4180 J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>
eau vapeur	c <sub>P</sub> = 1850 J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>
air sec	c <sub>P</sub> = 1005 J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>
air saturé en vapeur d'eau	c <sub>P</sub> = 1030 J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>

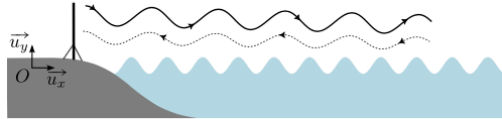
Enthalpie massique standard de vaporisation de l'eau à 100 °C : Δ<sub>vap</sub>H° = 2257 kJ·kg<sup>-1</sup>

Enthalpies de formation et entropies molaires standards à 298 K :

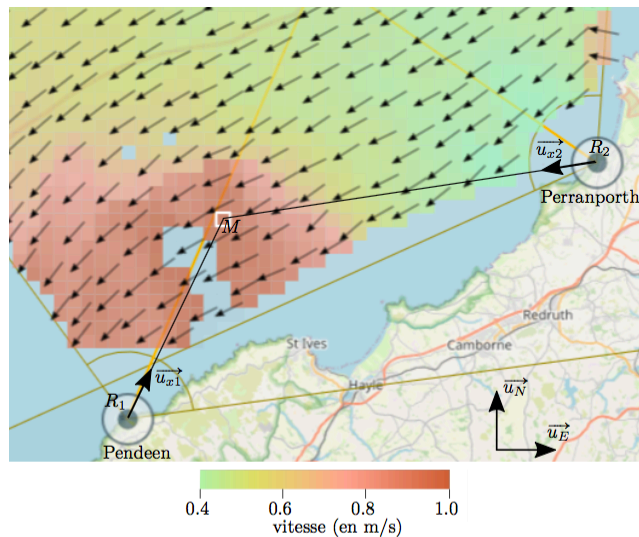
Espèces	Δ <sub>f</sub> H° (kJ·mol <sup>-1</sup> )	S° <sub>m</sub> (J·mol <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup> )
H <sub>2</sub> (g)	0	130,5
O <sub>2</sub> (g)	0	205,0
H <sub>2</sub> O(l)	-285,1	70,0
H <sub>2</sub> O(g)	-241,8	188,7
C(graphite)	0	5,7
CO(g)	-110,6	197,6
CO <sub>2</sub> (g)	-393,5	213,7
Pb(s)	0	64,5
PbO(s)	-218,0	66,5
PbO <sub>2</sub> (s)	-277,1	68,0
PbS(s)	-100,4	91,2
Pb <sub>3</sub> O <sub>4</sub> (s)	-719,0	211
SO <sub>2</sub> (s)	-296,9	248

## Partie 2 – Détection radar des courants océaniques

En 1955, D.D. Crombie découvre que la réflexion d'une onde radio sur la mer produit un écho caractéristique, qu'il interprète par l'interaction du champ électromagnétique avec les vagues agitant la surface de l'eau. À partir de là, divers instituts ont développé des techniques d'observation à distance de l'état de la mer. Elles utilisent un radar côtier émettant une onde de la bande HF (haute fréquence, entre 3 et 30 MHz) et recevant l'onde rétrodiffusée (ou réfléchie) par l'interface entre l'air et l'eau (figure 1). Le développement de ces instruments se poursuit aujourd'hui et cette partie aborde les principes physiques sur lesquels leur fonctionnement repose.



**Figure 1** – Radar côtier émettant une onde HF vers la surface de la mer et recevant l'onde rétrodiffusée



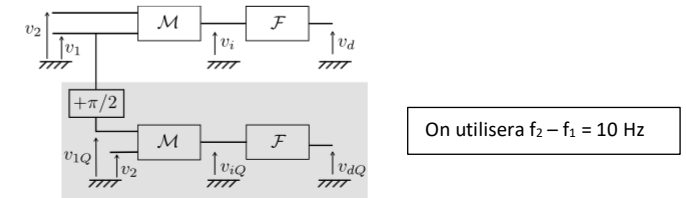
**Figure 4** – Carte des courants en Mer Celtique fournie par les radars de Pendeen et Perranporth repérés par les points  $R_1$  et  $R_2$  [1]. Les spectres de la figure 3 concernent le point  $M$  signalé par un carré au bord blanc.

Les courants marins introduisent un décalage Doppler sur l'onde réfléchie de fréquence  $f$ .

Le décalage Doppler  $f_D$  proportionnel à la vitesse à mesurer est souvent inférieur à 1 Hz et il concerne une onde dont la fréquence initiale est de l'ordre de 10 MHz. La mesure précise de cette minuscule variation est réalisée par détection synchrone, technique dont la section I introduit le principe. Parallèlement, l'antenne réceptrice capte une multitude d'échos provenant de chaque petit élément de la mer sur une surface de plusieurs centaines de kilomètres carrés. Pour établir une carte de courant de celle visible sur la figure 4, il faut analyser simultanément tous ces échos et déterminer d'où chacun provient, en calculant notamment la distance à l'antenne de chaque petit élément réflecteur. Cette *résolution en distance* fait elle aussi appel à la détection synchrone (section II) et, dans les installations modernes, on la conduit conjointement à la détermination des décalages Doppler. Par souci de simplicité, on dissocie l'étude de ces deux aspects.

## I – Mesure d'une différence de fréquence par détection synchrone

On considère deux signaux sinusoïdaux  $v_1(t) = A \cos(2\pi f_1 t)$  et  $v_2 = B \cos(2\pi f_2 t + \varphi_0)$ , où  $A$ ,  $B$  et  $\varphi_0$  sont des constantes, dont on souhaite mesurer l'écart de fréquence  $f_2 - f_1$ , supposé très inférieur aux fréquences  $f_1$  et  $f_2$ . Le montage de détection synchrone qui permet d'y parvenir est représenté schématiquement sur la figure 5 : il est formé d'un multiplieur analogique  $\mathcal{M}$  (qui donne une tension de sortie proportionnelle au produit de ses deux tensions d'entrée) et d'un filtre  $\mathcal{F}$  dont la nature sera étudiée plus loin.



**Figure 5** – Principe d'un montage de détection synchrone. Jusqu'à la question **Q20** incluse, la partie inférieure sur fond gris n'a pas à être considérée.

**Q18.** Exprimer à un facteur près le signal intermédiaire  $v_i$ , puis justifier que son spectre fait apparaître les fréquences  $f_2 + f_1$  et  $|f_2 - f_1|$ . Indiquer le type de filtrage qui permet d'obtenir, à la sortie du filtre, un signal  $v_d$  de fréquence  $|f_2 - f_1|$ .

Le traitement des signaux radars fait intervenir des composants spécifiques aux hautes fréquences. Pour des ultrasons au contraire, avec des fréquences de l'ordre de  $10^4$  Hz, des composants usuels disponibles dans un lycée (résistances, condensateurs et bobines d'auto-induction) fonctionneraient.

**Q19.** Proposer pour  $\mathcal{F}$  un schéma électrique de filtre passif convenable, sans préciser pour l'instant les valeurs des composants. Un filtre d'ordre 1 est acceptable mais le jury valorisera davantage un filtre d'ordre 2, plus efficace.

**Q20.** Exprimer la fonction de transfert du montage de la question précédente. Pour  $f_1 \approx f_2 \approx 40$  kHz, proposer des valeurs réalistes pour les composants du filtre  $\mathcal{F}$ .

À l'issue du filtrage,  $v_d$  est pratiquement sinusoïdal et mesurer sa fréquence revient à mesurer  $|f_2 - f_1|$ , ce qui était le but à atteindre. Cependant, dans le cas de l'effet Doppler (où  $f_1 = f$  et  $f_2 = f_r$ ), il est important de connaître le *signe* de  $f_2 - f_1$  (Partie A section III). Pour cela, on complète le montage de la figure 5 par une seconde voie (représentée sur fond gris) dans laquelle on applique des opérations analogues après avoir déphasé  $v_1$  de  $+\pi/2$  (démodulation en quadrature).

**Q21.** Dans l'hypothèse d'un filtrage idéal, exprimer le signal  $v_{dQ}$  et expliquer comment son observation conjointe à celle de  $v_d$  permet d'obtenir le signe de  $f_2 - f_1$ .

## II – Mesure de distance par modulation de fréquence

La mesure de la distance des éléments réflecteurs fonctionne elle aussi par détection synchrone grâce à une modulation de la fréquence de l'onde émise. Alors qu'un signal de fréquence  $f_0$  constante varie selon  $\cos(2\pi f_0 t)$ , le champ électrique émis par l'antenne est proportionnel à la tension  $v_e(t)$ ,  $T_m$ -périodique et définie sur une période par

$$\forall t \in [0, T_m[, v_e(t) = A \cos \Phi(t) \quad \text{avec} \quad \Phi(t) = 2\pi \left( f_0 + \frac{Bt}{2T_m} \right) t. \quad (9)$$

La grandeur positive  $B$ , homogène à une fréquence et très inférieure à  $f_0$ , est appelée largeur de bande. La période de répétition  $T_m$  est de l'ordre de quelques dixièmes de secondes et  $f_0$  de l'ordre de 10 MHz.

On définit la *fréquence instantanée*  $f(t)$  de  $v_e$  par  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt}(t)$ .



**Q22.** Exprimer  $f(t)$  et tracer schématiquement le graphe de ses variations sur deux périodes.

La cible qui réfléchit l'onde, supposée ici immobile, se trouve à la distance  $d$  de l'antenne émettrice. À l'instant  $t$ , la station radar dispose du signal d'émission  $v_e(t)$  et du signal d'écho  $v_r(t)$ . Ce dernier provient de la réflexion par la cible du signal émis un peu plus tôt, de sorte que sa fréquence  $f_r(t)$  à l'instant  $t$  est celle que possédait  $v_e$  à l'instant  $t - \tau$ .

**Q23.** Donner l'expression de  $\tau$ . Pour  $d = 10$  km, vérifier qu'il est très inférieur à  $T_m$ , puis représenter sur un même graphique les variations de  $f(t)$  et  $f_r(t)$ . Les deux courbes seront légendées et tracées en deux couleurs distinctes. Pour ce graphique seulement, on prendra  $\tau = T_m/10$ .

Les signaux  $v_e(t)$  et  $v_r(t)$  sont appliqués à l'entrée du montage de détection synchrone (représenté figure 5 et étudié dans la section I).

**Q24.** Exprimer la fréquence  $f_d$  du signal démodulé  $v_d$ . Montrer que sa mesure permet d'accéder à la distance  $d$  de la cible, qu'on exprimera en fonction de  $c$ ,  $B$  et  $T_m$ .

### III – Questions liées à l'échantillonnage

En pratique, l'écho reçu par un radar océanographique n'est pas parfaitement harmonique et la tension  $v_d$  issue de la détection synchrone présente de petites variations aléatoires. Elles se superposent au signal sinusoïdal idéal attendu et en compliquent l'exploitation. Pour mesurer la fréquence  $f_d$ , le signal bruité est échantillonné et numérisé, puis on procède à son analyse spectrale par transformée de Fourier discrète (TFD).

#### III.1 – Analyse spectrale par TFD

L'analyse spectrale par TFD est une technique couramment mise en œuvre dans les oscilloscopes numériques et les logiciels accompagnant les cartes d'acquisition. Son calcul est généralement conduit par l'algorithme de transformée de Fourier rapide (de sigle fréquemment rencontré FFT).

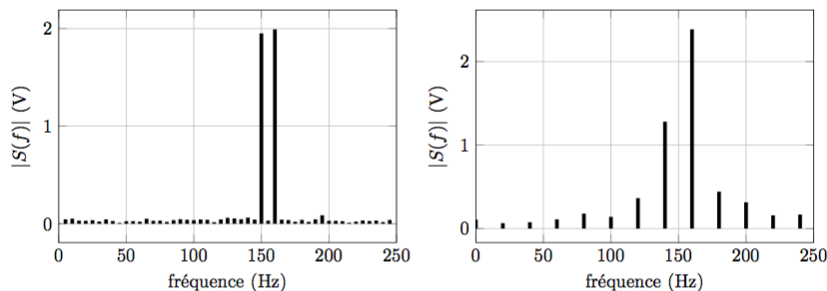
On considère un signal analogique  $v(t)$  dont on a prélevé  $N_e$  échantillons  $v_n = v(t_n)$  aux instants  $t_n = nT_e$  avec  $n \in \{0, 1, 2, \dots, N_e - 1\}$ . La TFD permet d'afficher  $N_e$  valeurs  $|S(f_k)|$  associées aux fréquences  $f_k = k/(N_e T_e)$  avec  $k \in \{0, 1, 2, \dots, N_e - 1\}$ . Selon les paramètres  $N_e$  et  $T_e$  choisis pour l'échantillonnage, ces nombres  $|S(f_k)|$  constituent une représentation plus ou moins fidèle du spectre de  $v$ .

**Q25.** Expliquer en quoi consiste le phénomène de « repliement du spectre » et comment s'en prémunir.

L'échantillonnage sur une durée finie limite la capacité à distinguer, dans le spectre de  $v$ , des composantes harmoniques possédant des fréquences  $f_1$  et  $f_2$  très proches. On appelle *résolution spectrale* la valeur de  $|f_2 - f_1|$  en dessous de laquelle cette distinction est impossible; elle s'identifie ici à la *précision*  $\delta f$  sur l'échelle des fréquences. À titre d'exemple, on a représenté sur la figure 6 la TFD de la fonction  $v(t)$  suivante, qui comporte un léger bruit aléatoire  $\epsilon(t)$  superposé :

$$v(t) = A \cos(2\pi f_1 t) + A \cos(2\pi f_2 t) + \epsilon(t) \quad \text{avec} \quad A = 2 \text{ V}, \quad f_1 = 150 \text{ Hz}, \quad f_2 = 160 \text{ Hz}, \quad |\epsilon(t)| < 0,1 \text{ V}. \quad (10)$$

Sur le spectre de gauche,  $N_e = 100$ ,  $T_e = 2$  ms; sur celui de droite  $N_e = 100$ ,  $T_e = 0,5$  ms. Ces valeurs numériques ont été choisies dans un but illustratif et n'ont aucun lien avec celles mises en jeu dans le traitement des signaux radars. Pour plus de lisibilité, le graphique a été restreint aux fréquences inférieures à 250 Hz.



**Figure 6** – Exemples de spectres obtenus par TFD du signal donné par l'expression (10) pour deux choix des paramètres d'échantillonnage.

**Q26.** Commenter ces deux spectres et analyser leur capacité à révéler les composantes spectrales de  $v(t)$ . Exprimer en fonction de  $N_e$  et  $T_e$  la précision en fréquence  $\delta f$  (identique à la résolution spectrale), et donner sa valeur numérique dans chacun des deux cas.

Dans les radars océanographiques, une double TFD permet d'obtenir simultanément les informations relatives à la vitesse  $v_x$  de la cible ( $f_r - f = \pm f_B + f_D$ , question **Q15**) et celles relatives à sa distance ( $f_r - f$  est lié à  $d$ , question **Q24**). Comme annoncé au début de la partie, on traite *séparément* ces deux phénomènes dans les sous-sections III.2 et III.3 respectivement, comme si chacun existait indépendamment de l'autre.

La fréquence  $f_B$  désigne une fréquence liée à la fréquence d'oscillation des vagues

#### III.2 – Limite et résolution en vitesse

Sur chaque rampe de modulation, de durée  $T_m$ , un échantillon de  $v_d$  est acquis et on répète cette opération  $N$  fois pour une durée d'acquisition  $T_a = NT_m$ . Les données sont ici  $f = 29,85$  MHz,  $f_B = 0,56$  Hz,  $T_m = 0,262$  s et  $B = 125$  kHz (radar WERA de la société Helzel Messtechnik).

**Q27.** Indiquer jusqu'à quelle fréquence maximale on peut obtenir le spectre pour en déduire  $f_r - f$ . En déduire la valeur maximale de  $f_D$  atteignable et la vitesse  $v_x$  maximale associée. On rappelle que ces grandeurs ont été reliées l'une à l'autre dans la question **Q15**.

**Q28.** Pour  $N = 4096$ , fournir la résolution spectrale de la mesure de  $f - f_r$ . En déduire la résolution  $\Delta v_x$  sur la vitesse  $v_x$ .

#### III.3 – Limite et résolution en distance

Au sein d'une unique rampe de modulation de durée  $T_m = 0,262$  s,  $M$  échantillons équidistants de  $v_d$  sont acquis en vue du calcul de la TFD.

**Q29.** Exprimer la valeur maximale  $f_{d_{max}}$  de  $f_d$  que l'on peut déduire de l'analyse de ce spectre. Pour une portée de radar  $d_{max}$  égale à 50 km, proposer une valeur de  $M$  compatible. On rappelle que  $d$  et  $f_d$  ont été reliées l'une à l'autre dans la question **Q24**.

**Q30.** Indiquer quelle est la résolution spectrale sur la mesure de  $f_d$ . En déduire la résolution en distance  $\Delta d$ . Pour information, la société Helzel Messtechnik indique que l'utilisateur peut paramétrer le radar et choisir des résolutions de 0,3 km, 0,6 km et 1,2 km.

### Partie 3 – Résistance d'un conducteur ohmique torique

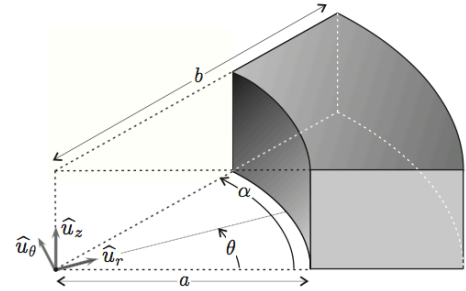


FIGURE 3 – Portion d'un conducteur torique

Un conducteur ohmique est caractérisé par une conductivité électrique  $\gamma$  de l'ordre de  $10^8 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ . Il forme un tore tronqué de section rectangulaire de rayon intérieur  $a$ , de rayon extérieur  $b$ , d'épaisseur  $c$ .

On cherche à déterminer la résistance orthoradiale  $R$  d'une portion de ce conducteur comprise entre les angles  $\theta = 0$  où on applique un potentiel uniforme  $V = U$  et  $\theta = \alpha$  où on applique un potentiel  $V = 0$ .

❑ 6 — On rappelle la valeur numérique

de la constante  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$  dans les unités du système international. Rappeler le nom et l'unité pratique de cette constante. Établir l'équation locale de conservation de la charge dans un modèle unidimensionnel simple.

❑ 7 — Établir, dans un conducteur ohmique, l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charge  $\rho$ . En déduire que  $\rho \simeq 0$  tant que la durée  $T$  caractéristique de variation des grandeurs électromagnétiques est très supérieure à une durée  $\tau$  dont on donnera l'expression en fonction de  $\gamma$  et  $\epsilon_0$  ainsi que la valeur numérique.

❑ 8 — Montrer qu'un terme peut être négligé dans l'équation de Maxwell-Ampère si  $T \gg \tau$ .

❑ 9 — Établir l'équation vérifiée en régime permanent et dans le conducteur ohmique par le potentiel électrique  $V$ .

❑ 10 — On suppose que  $V$  ne dépend que de l'angle  $\theta$  en coordonnées cylindriques et on donne, dans ce système de coordonnées, les expressions du gradient du potentiel  $\text{grad}V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{u}_\theta$  et de son laplacien  $\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$ . Déterminer les expressions de  $V(\theta)$ , du champ  $\vec{E}$  et de la densité de courant  $\vec{j}$ .

❑ 11 — Déterminer l'expression de l'intensité totale  $I$  traversant une section rectangulaire droite quelconque de ce tore. En déduire sa résistance orthoradiale  $R$  en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\gamma$  et  $\alpha$ .

❑ 12 — Rappeler l'expression de la résistance d'un conducteur filiforme de section  $S$  et de longueur  $L$ . Vérifier qu'elle est cohérente avec l'expression du conducteur torique quand  $b$  est très proche de  $a$ .

Vous pourrez utiliser l'équation de Maxwell-Gauss pour établir l'équation différentielle temporelle de la question 7