

Partie I – Igloo CCINP TPC 2022

1 Généralités

1.1 Régime variable

Q1. L'existence d'une inhomogénéité spatiale de température engendre un courant thermique s'opposant à cette inhomogénéité, et proportionnel au gradient de température avec une constante de proportionnalité λ appelée conductivité thermique propre à un matériau. Ceci se résume sous l'écriture suivante de la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (1)$$

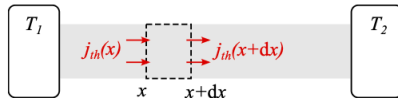
Q2. On effectue un bilan thermique entre les instants t et $t + dt$ sur une tranche de matériau comprise entre x et $x + dx$:

- la variation d'énergie interne est :

$$U(t + dt) - U(t) = dU = C dT = mc dT = (\rho \times S dx) c dT$$

- le flux thermique (entrant et sortant par les faces de section S) est :

$$\phi_{\text{th}} dt = +j_{\text{th}}(x, t) \times S dt - j_{\text{th}}(x + dx, t) \times S dx$$



Ce qui donne le bilan suivant :

$$\begin{aligned} dU &= \phi_{\text{th}} dt \\ \rho S dx c dT &= (j_{\text{th}}(x, t) - j_{\text{th}}(x + dx, t)) S dt \\ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} \end{aligned}$$

puis en utilisant la loi de Fourier à une dimension : $j_{\text{th}}(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{équation de la diffusion de la chaleur} \quad (2)$$

Q3. Les unités des différents termes sont :

- ρ en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- c en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- L en m
- λ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (à retrouver avec la loi de Fourier ou avec la légende de la figure 4)

On en déduit que comme attendu par la notation : $\tau = \frac{\rho c L^2}{\lambda}$ est un temps en second (s). Il représente le temps caractéristique de diffusion thermique sur la longueur L du matériau et peut être retrouvé en faisant une analyse d'ordre de grandeur dans l'équation de la chaleur.

Q4. Le phénomène de diffusion thermique est un phénomène **irréversible**. Ceci peut être vu soit comme une conséquence du second principe de la thermodynamique, qui formule par exemple que la chaleur ne se déplace que des zones chaudes vers les zones froides ; ou par la non-invariance de l'équation de la diffusion par inversion du temps : $t' \mapsto -t$.

1.2 Régime stationnaire

Q5. En régime stationnaire, l'équation se résume à :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

donc $T(x) = Ax + B$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ deux constantes à déterminer. On utilise alors les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x=0) &= T_1 = A \times 0 + B \\ T(x=L) &= T_2 = A \times L + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B &= T_1 \\ A &= \frac{T_2 - T_1}{L} \end{cases}$$

donc :

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x \quad (3)$$

Q6. Le flux thermique total à travers la section S est :

$$\phi_{12} = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S} = \iint_S -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} \vec{u}_x \cdot dS \vec{u}_x = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} S$$

$$\phi_{12} = \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2) \quad (4)$$

Le flux thermique total est directement proportionnel à la différence de température.

Q7. On peut alors faire apparaître la résistance thermique par analogie avec la loi d'Ohm donnée par l'énoncé et identifier R_{th} .

$$T_1 - T_2 = R_{\text{th}} \phi_{12} \quad (5)$$

$$R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S} \quad (6)$$

Q8. L'analogie avec l'électrocinétique est la suivante :

Grandeurs	Électrocinétique	Thermique
Différence de potentiel	$V_1 - V_2$	$T_1 - T_2$
Résistance	R	R_{th}
Flux	I	ϕ_{12}
Conductivité	γ	λ

Q9. Le transfert conducto-convectif se traduit par un flux thermique suivant la loi de Newton. Par une analogie directe, on peut l'écrire comme une loi d'Ohm thermique et identifier la résistance thermique.

$$\phi_{sf} = h(T_s - T_f) S' \quad \Leftrightarrow \quad T_s - T_f = \frac{1}{h S'} \phi_{sf}$$

donc

$$R_{\text{cc}} = \frac{1}{h S'} \quad (7)$$

2 Bilan thermique d'un igloo

2.1 Résistance conductive de l'igloo

Q10. Dans les expressions précédentes comme dans l'expression donnée ici, la résistance thermique est inversement proportionnelle à la conductivité thermique : $R_{\text{th}} \propto \frac{1}{\lambda}$. On observe sur le graphique que la conductivité thermique λ augmente avec la masse volumique ρ de la neige. Donc si la neige est plus tassée, sa masse volumique augmente, ce qui augmente sa conductivité thermique et diminue alors sa résistance thermique : l'igloo est moins bien isolé. Il est donc préférable de ne pas tasser les blocs de neige pour avoir un igloo mieux isolé.

Q11. Pour $\rho = 200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, on lit sur le graphique : $\lambda \simeq 0,14 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. La résistance thermique est alors de $R_{\text{th}} \simeq 0,13 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

I Le cœur du réacteur

I.A – Présentation du dispositif

Q1. Les centrales nucléaires terrestres utilisent de grandes quantités d'eau pour le refroidissement, elles sont d'ailleurs positionnées le long des grands fleuves ou au bord de la mer. L'eau n'étant pas disponible sur Mars, on ne peut pas reproduire le fonctionnement habituel d'une centrale nucléaire.

Q2. En supposant un puissance thermique volumique uniforme, on peut écrire : $P_v = \frac{P}{V}$ où V est le volume d'uranium. Finalement $P_v = P \frac{\rho}{m}$. AN : $P_v \approx 2,7 \times 10^6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$.

I.B – La température du cœur

Q3. $dH = H(t + dt) - H(t)$ est la variation d'enthalpie du système pendant le temps dt , $\Phi(r)dt$ représente la quantité de chaleur entrant dans le système en r pendant dt , $-\Phi(r + dr)dt$ représente la quantité de chaleur sortant du système en $r + dr$ pendant dt et $P_v 2\pi r h dr dt$ est la quantité de chaleur produite au sein du système par la réaction nucléaire.

Q4. En régime permanent, toutes les variables étant indépendantes du temps, $dH = 0$. On obtient alors :

$$0 = -(\Phi(r + dr) - \Phi(r))dt + P_v 2\pi r h dr dt \iff 0 = -\frac{d\Phi(r)}{dr}dr + P_v 2\pi r h dr$$

D'où l'équation (I.2) : $\frac{d\Phi(r)}{dr} = P_v 2\pi r h$. CQFD

Q5. Par intégration de la relation (I.2), il vient : $\Phi(r) = \pi h P_v r^2 + A$.

Q6. La loi de Fourier s'écrit : $\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\text{grad}} T(M, t)$.

Q7. Le problème étant supposé invariant par rotation et translation d'axe (Oz), on en déduit que $T(r, \theta, z, t) = T(r, t)$ et en régime stationnaire $T(r)$. La loi de Fourier se simplifie alors en : $j_{th,r}(r) = -\lambda \frac{dT(r)}{dr}$. En outre, $\Phi(r) = 2\pi r h j_{th,r}(r)$, on peut alors écrire :

$$\Phi(r) = -2\pi r h \lambda \frac{dT(r)}{dr}$$

Q8. En utilisant les expressions des questions Q5 et Q7, on peut écrire :

$$\pi h P_v r^2 + A = -2\pi r h \lambda \frac{dT(r)}{dr} \iff \frac{dT(r)}{dr} = -\frac{P_v r}{2\lambda} - \frac{A}{2\pi r h \lambda}$$

En intégrant, on trouve alors : $T(r) = -\frac{P_v r^2}{4\lambda} - \frac{A}{2\pi h \lambda} \ln r + B$ C.Q.F.D.

Q9. En régime permanent, le champ de température ne dépend pas du temps. Si l'on s'intéresse au système constitué de l'intérieur du cylindre (pour $r < R_1$) on aura $dH = H(t + dt) - H(t) = 0 = -\Phi(R_1)dt$ d'où $\Phi(R_1) = 0$. D'où $0 = \pi h P_v R_1^2 + A$ soit $A = -P_v \pi R_1^2 h$.

Q10. En remplaçant, on trouve :

$$T(R_1) = T(R_2) + \frac{P_v R_1^2}{4\lambda} \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \right)$$

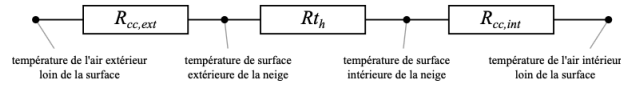
Q11. Numériquement : $T(R_1) \approx 405^\circ\text{C}$.

Q12. Si la température de la barre de carbure n'était pas uniforme, alors on aurait un flux de chaleur dans celle-ci et – comme il n'y a pas de terme de production dans le bilan pour compenser – il ne serait pas possible d'avoir $dH = 0$ et on ne pourrait donc pas être en régime stationnaire.

Q13. Comme $T(R_1) < T_{fus}$, le modèle fonctionne.

2.2 Prise en compte de la conducto-convection

Q12. Le modèle adapté pour modéliser les phénomènes de conduction et de conducto-convection ici est celui des résistances en série. En effet, les différents phénomènes se font « en série » / « à la suite » par différentes couches de transfert thermique, et avec des température de bords différentes qui ne pourraient correspondre à un modèle en dérivation.



Q13. La résistance thermique équivalente est donc :

$$R_{igloo} = R_{cc,int} + R_{th} + R_{cc,ext} = \frac{1}{h_i S_i} + \frac{L}{2\pi \lambda L(r_i + L)} + \frac{1}{h_e S_e}$$

avec les surfaces des hémisphères : $S_i = 2\pi r_i^2$ et $S_e = 2\pi(r_i + L)^2$

$$R_{igloo} = \frac{1}{2\pi h_i r_i^2} + \frac{L}{2\pi \lambda L(r_i + L)} + \frac{1}{2\pi h_e (r_i + L)^2} \quad (8)$$

Q14. Cette modélisation ne tient pas compte du **rayonnement thermique**. Ce mode de transfert se fait dans les milieux transparents (ici l'air) sans support matériel, donc en parallèle de la convection. La résistance thermique associée devrait donc être placée en parallèle de celles de la conducto-convection (et donc augmenter effectivement le flux thermique total).

2.3 Température intérieure de l'igloo

Q15. On mène les calculs comme en électronique en s'appuyant sur l'analogie précédente (avec ici un générateur de « courant thermique » P). On part ici d'une loi des nœuds :

$$\begin{aligned} P &= P_{igloo} + P_{sol} \\ &= \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{igloo}} + \frac{T_{int} - T_{sol}}{R_{sol}} \\ \iff R_{igloo} R_{sol} P &= (T_{int} - T_{ext}) R_{sol} + (T_{int} - T_{sol}) R_{igloo} \\ \iff T_{int} (R_{sol} - R_{igloo}) &= R_{igloo} R_{sol} P + T_{ext} R_{sol} + T_{sol} R_{igloo} \\ T_{int} &= \frac{P R_{igloo} R_{sol} + T_{ext} R_{sol} + T_{sol} R_{igloo}}{R_{igloo} + R_{sol}} \end{aligned} \quad (9)$$

Remarque : la notion de générateur de courant n'est pas au programme de TPC en 2021-2022.

Q16. Application numérique avec des températures à convertir évidemment en K : $T_{int} \simeq 275 \text{ K} = 2^\circ\text{C}$

Q17. Si on suppose que la résistance thermique augmente de moitié : $R'_{igloo} = 1,5 \times R_{igloo} = 0,22 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$, on obtient : $T'_{int} \simeq 292 \text{ K} = 19^\circ\text{C}$.

On gagne effectivement une vingtaine de degrés comme annoncé dans le texte.

I.C – Durée de vie du réacteur

Q14. On peut estimer la durée de vie τ du réacteur en divisant l'énergie disponible E par la puissance consommée en régime permanent P , l'énergie disponible étant l'énergie libérée par la fission d'un atome d'uranium 235 multipliée par le nombre de ces atomes contenu dans le cœur du réacteur. On trouve alors :

$$\tau = \frac{E_{at.0} \cdot 2. m \cdot N_A}{M_{U235} P} \quad \text{Numériquement : } \tau = \frac{200.10^6 \times 1,6.10^{-19} \times 0,2 \times 28 \times 6,02.10^{23}}{235.10^{-3} \times 4.10^3} \approx 3700 \text{ ans}$$

La durée de vie du réacteur est donc très grande devant la durée prévue pour l'expédition. On ne risque donc pas d'arriver à court d'énergie, même en cas d'imprévu.

Partie III – Séchage des sols CCINP PSI 2021

Diagramme schématisant le séchage d'un sol :

Q31. La pression de vap. saturante est la pression d'équilibre liq/vapide de l'eau sous forme gazeuse.

Q32. Le courant d'évaporation au niveau du sol est piloté par la diff. de pression partielle de l'eau entre $z = H^+$ et la press. partielle de l'air "au loin" de cette surface p_{ext} de la surface H^+ . Or la pression partielle au voisinage immédiat est supérieure à p_{ext} il y a évaporation. Le vent a tendance à homogénéiser le milieu extérieur et donc la pression partielle extérieure p_{ext} et favorise l'évaporation. ($p_{ext} = p_{a, \infty}$ et $p_{v, \infty}$), et certainement modifier la valeur.

Q33. $\vec{J}_{ec} = -D \vec{\text{grad}} n \rightarrow$ loi de Fick

\vec{J} vecteur densité de courant particulaire en $m^{-2} \cdot s^{-1}$

D coefficient de diff. en $m^2 \cdot s^{-1}$; n densité particulaire en m^{-3}

Q34. $\vec{J}(z+dz)$ et $\vec{J}(z)$ à travers une surface S d'épaisseur dz . $dV = S dz$.

Bilan de part. en régime statio :

$$dN = 0 = [\phi_s(z) - \phi_s(z+dz)] dt$$

particules entrantes en z ; particules sortantes en $z+dz$

donc $\frac{d\phi}{dz} = 0$ ou $\phi_s(z+dz) = \phi_s(z)$

(avec $\phi = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$) \rightarrow le débit ϕ_s est uniforme (conservation)

Q35. $\phi = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = j_s = -D \frac{dn_{vap}}{dz} S = \text{cte} = \phi_s$
 (uniforme sur S)

donc par intégration $\rightarrow n_{vap}(z) = -\frac{\phi_s}{DS} z + K$

Avec la CL $\rightarrow n_{vap}(z_m) = -\frac{\phi_s}{DS} z_m + K$
 en z_m

$\hookrightarrow K = \frac{\phi_s}{DS} z_m + n_{vap}(z_m)$

donc $n_{vap}(z) = -\frac{\phi_s}{DS} (z - z_m) + n_{vap}(z_m)$

Q36 - [Vapeur d'eau $\leq p_{sat}$] avec $M = \text{masse de mol} \times \frac{N_A}{V} = \frac{P}{RT} \times \frac{N_A}{V}$
 $\frac{P}{V} = \frac{\text{masse de mol}}{V} \times \frac{RT}{N_A}$
 $\frac{n_{\text{mol}}}{V} = \frac{P}{RT}$
 en $z = z_m$ Eq. Eq/gaz $P = P_{sat}$
 $n_{vap}(z_m) = \frac{P_{sat}(T)}{RT}$

Q37 - $n_{vap}(z) = \frac{P_{sat}(T)}{RT} - \frac{\phi_s}{DS} (z - z_m)$

Q38 - Cp à la hauteur H avec $n_{vap}(H)$

$P(H) = n_{vap}(H) RT = P_{sat}(T) - \frac{RT \phi_s}{N_A DS} (H - z_m)$

Kge) au début du processus d'évaporation $z_m = H$ et $P(H) = P_{sat}(T)$
 Équilibre liq/vapeur en $z = H$, l'évaporation ne peut
 débuter que si $P(H) = P_{sat} > P_{ext}$ ($\vec{j} = R(P(H) - P_{ext})\vec{e}_z \neq 0!$)
 en $t=0$

Un instant plus tard, z_m augmente (\downarrow), on retrouvera P_{sat}
 et $n_{vap}(z_m)$ en z_m mais en $z = H$ la densité particulière
 sera + faible comme la pression $P(H)$ (qui \downarrow lentement avec le temps)
 ($n_{vap}(z) \downarrow$ avec z) qui sera + faible que P_{sat} : $P(H) = P_{sat}$
 à $t=0$

Q39 - Continuité du flux à l'interface sol-atmosphère :

$\phi_s = h(P(H) - P_{ext})S = hS(P_{sat} - \frac{RT \phi_s}{N_A DS} (H - z_m) - P_{ext})$

$\phi_s \left(1 + \frac{RTh}{N_A D} (H - z_m)\right) = hS(P_{sat} - P_{ext})$

$\phi_s = \frac{hS(P_{sat} - P_{ext})}{1 + \frac{RTh}{N_A D} (H - z_m)}$

Q40 -
 A l'interface le volume dV de
 sol mouillé qui s'évapore pdr dr
 est $dV = dz_m S$
 le nombre de particules de liq transformées en vapeur qui s'en
 échappent est $dN = \phi_s dr = n_{liq} dV = n_{liq} dz_m S$
 perdues $\hookrightarrow \frac{dz_m}{dr} = -\frac{\phi_s}{n_{liq} S}$

$$Q41 - \frac{dz_m}{dt} = - \frac{h}{n_{liq}} \frac{P_{SAT}(T) - P_{ext}}{1 + \frac{hRT}{NA D} (H - z_m)}$$

$$dz_m \left(1 + \frac{H - z_m}{H_0} \right) = - \frac{h}{n_{liq}} (P_{SAT}(T) - P_{ext}) dt$$

$$\hookrightarrow \text{avec } H_0 = \frac{hRT}{NA D}$$

Le temps de séchage τ_s

est donné en intégrant z_m entre 0 et H pour t entre 0 et τ_s

$$\int_0^H \left[1 + \frac{H}{H_0} - \frac{z_m}{H_0} \right] dz_m = - \frac{h}{n_{liq}} (P_{SAT}(T) - P_{ext}) \int_0^{\tau_s} dt$$

$$\left(1 + \frac{H}{H_0} \right) H - \frac{H^2}{2H_0} = H \left(1 + \frac{H}{2H_0} \right) = - \frac{h}{n_{liq}} (P_{SAT}(T) - P_{ext}) \tau_s$$

$$\tau_s = \frac{\left(1 + \frac{hRT H}{2NA D} \right) n_{liq} H}{h (P_{SAT}(T) - P_{ext})}$$

Le temps de séchage τ
+ vite que H!

(en effet $P(H) \downarrow$ et $z_m \uparrow$)
 \downarrow le moteur de l'évaporation

$z_m(t)$ régime variable! notai ~~seulement~~ très lente. On a utilisé le régime ARQS pour la diffusion des part. de vapeur d'eau!

valable si $\tau_{diff} \ll \tau_{sech}$ avec $\tau_{diff} = \frac{l^2}{D} = \frac{(1cm)^2}{5 \cdot 10^{-6}}$

$$= 2 \cdot 10^3 s = 2000 s$$

$$\approx \frac{1}{2} h$$

$$\text{et pour } 1 \text{ cm } \tau_{sech} \approx 4,5 \text{ jours}$$

sur la fig 11!

ARQS valide!

Q42 - Ds l'expression de $\frac{dz_m}{dt}$ et τ_{sech} et appon une hauteur caractéristique $H_{lim} = 2H_0 = 2 \frac{hRT}{NA D}$

$$\text{et } \tau_{sech} = \frac{n_{liq}}{h (P_{SAT} - P_{ext})} H \left(1 + \frac{H}{H_{lim}} \right)$$

Q43 - Pour $H \ll H_{lim} \rightarrow \tau_{sech} \propto H \rightarrow$ aux tps courts \ll heures et $H < 2 \text{ mm}$
 \hookrightarrow fig 12

AN: $H_{lim} \approx 4 \text{ mm!}$ en accord

Pour $H \gg H_{lim} \rightarrow \tau_{sech} \propto H^2$ pour $H > 1 \text{ cm}$
 \hookrightarrow accord fig 11!

