

DS de Physique 10 décembre 2025

Difficulté supérieure

PSI - Lycée du Parc des Loges – Durée 4H

Première partie – Aspects thermiques au sein du noyau de la Terre

On considère que l'intérieur de la Terre est constitué d'une succession de couches de propriétés physiques différentes, telles que représentées à la figure 1 :

- au centre, le noyau forme 17 % du volume terrestre et se divise en :
 - la graine (ou le noyau interne), essentiellement constitué de fer solide,
 - le noyau externe, essentiellement constitué de fer liquide ;
- dans la partie intermédiaire, le manteau constitue 81 % du volume terrestre ;
- en surface, la croûte solide représente moins de 2 % du volume terrestre.

Le problème aborde divers phénomènes et modèles en relation avec cette structure.

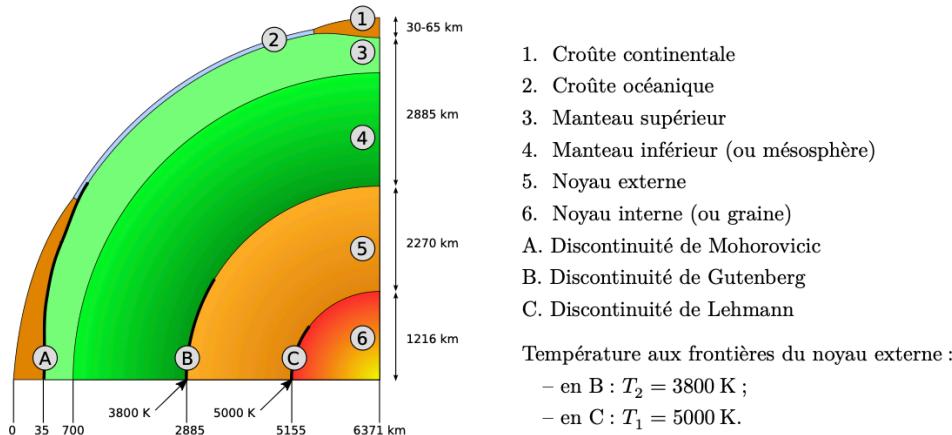


Figure 1 Structure de la Terre. D'après Wikipédia.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'expliquer clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

On définit l'unité imaginaire i , nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

Un formulaire et certaines données numériques, qui complètent celles de la figure 1, sont disponibles en fin d'énoncé.

On définit le flux géothermique moyen Φ_Q comme étant le flux thermique total issu de l'intérieur du globe terrestre à la surface de la Terre. Il est d'environ 4×10^{13} W et on estime qu'un quart de ce flux (soit 1×10^{13} W) est issu du noyau terrestre (le reste étant produit essentiellement dans le manteau). Ce flux thermique issu du noyau est appelé flux thermique profond et est noté $\Phi_{th,pr}$. Il résulte de trois contributions :

- environ 90 % correspondent au flux thermique initial $\Phi_{th,i}$ (9×10^{12} W) : il est associé au refroidissement progressif du noyau profond qui libère sous forme thermique l'énergie (gravitationnelle et cinétique) accumulée pendant la phase d'accrétion initiale de la Terre ;
- environ 10 % correspondent au flux thermique de différenciation, noté $\Phi_{th,d}$ (1×10^{12} W) : c'est l'énergie libérée par la cristallisation du noyau externe liquide à l'interface avec la graine solide.
- le reste, environ 0,06 %, provient des désintégrations radioactives au sein du noyau (la teneur en éléments radioactifs y étant très faible).

L'étude dans cette partie sera intégralement effectuée en régime stationnaire de transferts thermiques.

IV.A – Transferts thermiques dans le noyau externe

Le noyau terrestre, constitué de la graine et du noyau externe, est assimilé à une masse sphérique. Le noyau externe est le siège de transferts thermiques modélisés uniquement par de la conduction thermique avec une conductivité thermique, notée λ , uniforme et constante. On pose $T(r = R_1) = T_1$ la température à la surface de la graine solide et $T(r = R_2) = T_2 < T_1$ la température à la surface supérieure du noyau externe. La figure 7 explicite les notations, en complément de la figure 1 qui intègre des données utiles.

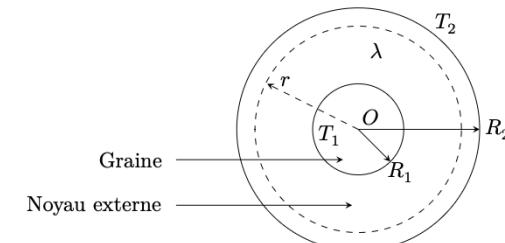


Figure 7 Schématisation du noyau terrestre.

Q 28. Exprimer le flux thermique $\Phi_{th}(r)$ traversant par conduction, dans le sens radial croissant, la sphère de centre O et de rayon $r \in [R_1, R_2]$ en fonction de λ , r et $\frac{dT}{dr}(r)$.

Q 29. Expliquer pourquoi il est raisonnable de considérer ce flux thermique indépendant de r dans le noyau externe. En déduire l'expression de la conductivité thermique λ en fonction de R_1 , R_2 , T_1 , T_2 et du flux thermique profond $\Phi_{th,pr}$.

Q 30. Estimer la valeur de la conductivité thermique λ dans ce modèle.

Des mesures sur le fer liquide et ses alliages envisagés pour la constitution du noyau externe, effectuées dans ses conditions de température et de pression élevées, fournissent des valeurs de conductivité thermique d'au plus $1 \times 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Q 31. Conclure à propos des mécanismes de transfert thermique réels dans le noyau externe.

IV.B – Croissance de la graine

Le noyau se refroidissant, la graine voit son rayon croître très lentement par cristallisation du liquide à sa surface.

On considère, dans le noyau externe, une pellicule sphérique d'épaisseur dr , au contact de la graine. Cette pellicule fluide a une température uniforme égale à la température du solide de la graine avec laquelle elle est en contact. Sa pression est supposée uniforme et constante de même que sa masse volumique qui sera prise égale à $\mu_N = 1 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On néglige tout mouvement convectif au cours du processus de cristallisation. À l'instant t , l'interface entre la graine et le noyau externe est repérée par $r(t) = R_1$. On suppose qu'entre t et $t + dt$, cette pellicule se cristallise, l'interface progressant ainsi, de façon homogène et isotrope, de r à $r + dr$.

On estime actuellement que le taux de croissance du rayon de la graine est $\tau = dr/dt \approx 0,3 \text{ mm/an}$.

Q 32. Montrer que le taux de croissance de la graine s'écrit

$$\tau = -\frac{\Phi_{th,d}}{4\pi R_1^2 \mu_N \Delta_{sol}h}$$

où $\Delta_{sol}h$ est l'enthalpie massique de solidification du fluide du noyau externe dans les conditions de température et de pression qui règnent à l'interface.

Q 33. En déduire une estimation de la valeur de $\Delta_{sol}h$. Discuter le résultat sachant que l'enthalpie massique de solidification du fer à température et pression ambiante est de $-270 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Formulaire et données

Formulaire

Le gradient en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \xi = \frac{\partial \xi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

La divergence en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\text{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

Données

Masse molaire du fer	$M_{\text{Fe}} = 55,8 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire du silicium	$M_{\text{Si}} = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'oxygène	$M_{\text{O}} = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Numéro atomique du fer	$Z = 26$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante universelle de gravitation	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6371 \text{ km}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$

Deuxième partie – Analyse de Fourier et diffusion thermique

On considère un matériau homogène assimilable à une répartition unidimensionnelle de matière selon un axe (Ox). On rappelle l'équation de la diffusion thermique unidimensionnelle sans perte et sans terme source, donnant la température $T(x,t)$ à l'abscisse x et au temps t dans le matériau :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

- – 15. Déterminer l'expression de la constante D en fonction de la masse volumique μ , du coefficient de conductivité thermique λ et de la capacité thermique massique c du matériau considéré. On pourra raisonner par analyse dimensionnelle. En déduire l'expression du temps caractéristique de diffusion τ sur une longueur L . Faire l'application numérique pour une diffusion dans le fer sur une longueur $L = 50$ cm.

Joseph Fourier a étudié la diffusion thermique le long d'un anneau de fer torique, de rayon moyen $R = 16$ cm et de section carrée de côté $a \ll R$. L'anneau est chauffé en un point pris comme origine des angles $\theta = 0$ dans une base cylindrique puis on suit l'évolution de la température à différents instants et pour différentes valeurs de l'angle θ .

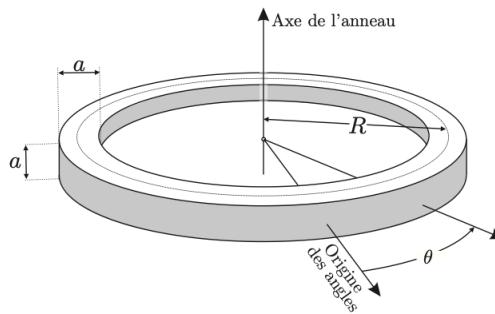


FIGURE 3 – Géométrie du problème étudié par Fourier : le tore à section carrée.

On notera $T(\theta, t)$ la température de l'anneau, supposée uniforme sur une section droite. On choisira $\theta \in]-\pi; \pi]$ et on admettra que, par symétrie, $T(-\theta, t) = T(\theta, t)$.

Le flux thermique conducto-convectif $\delta\Phi$ sortant à travers une surface dS de l'anneau de fer vers l'air environnant (de température T_e constante) est modélisé par la loi de Newton

$$\delta\Phi = h(T(\theta, t) - T_e)dS,$$

dans laquelle le coefficient d'échange thermique h est supposé constant.

On rappelle l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{e}_z.$$

- – 16. Rappeler la loi de Fourier pour la diffusion thermique. En déduire l'expression du vecteur densité de courant thermique \vec{j}_{th} puis dessiner l'allure des lignes de champ le long de l'anneau, en précisant leur orientation.

Pour établir l'équation décrivant l'évolution de la fonction $T(\theta, t)$ dans l'anneau, on considère le volume élémentaire dV compris entre deux sections de surface a^2 de l'anneau, repérées par les angles θ et $\theta + d\theta$.

- – 17. Déterminer les expressions approchées de dV ainsi défini et de la surface élémentaire dS_{lat} de son contact avec l'air. On rappelle que $a \ll R$. En déduire que $T(\theta, t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{a} (T - T_e) = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}.$$

- – 18. Donner, en régime stationnaire, et en fonction de T_e , R , θ et de $\delta = \sqrt{\frac{a\lambda}{4h}}$, la forme de la solution $T(\theta)$. On introduira deux constantes d'intégration A et B sans chercher à les déterminer pour l'instant. Préciser, en le justifiant, la dimension de la grandeur δ .

- – 19. On donne sur la figure 4 l'allure de la représentation graphique associée aux solutions $T(\theta)$ et $j_{th}(\theta)$ (pour r fixé). On note $T_1 = T(\theta = 0)$ la valeur, imposée par le chauffage, en $\theta = 0$. Commenter ces deux graphes puis les exploiter judicieusement pour déterminer, sur l'intervalle $[0, +\pi]$, les constantes A et B introduites précédemment, en fonction de T_1 , T_e , R et δ . En déduire la solution $T(\theta)$ sur l'intervalle $[0, +\pi]$.

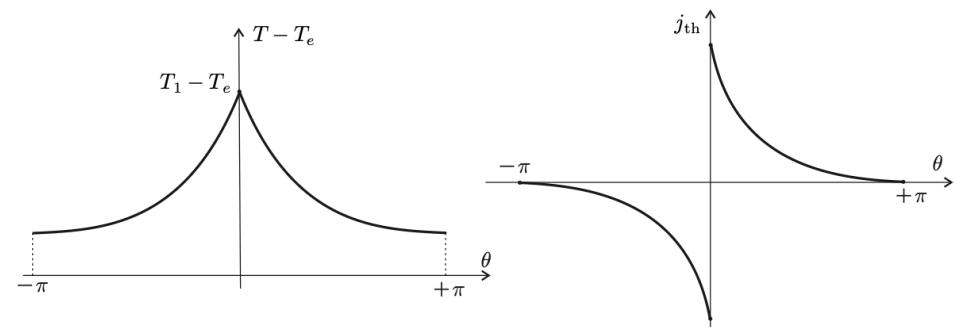


FIGURE 4 – Graphe des solutions : Différence de température à gauche, flux thermique superficiel à droite.

- – 20. Sur les relevés expérimentaux de Joseph Fourier du 31 juillet 1806, on lit que deux heures après le début du chauffage, les valeurs de températures des différentes sections de l'anneau sont stationnaires. Montrer que cet ordre de grandeur était prévisible à condition de supposer le phénomène de diffusion prépondérant en régime transitoire.

C'est en étudiant la diffusion thermique dans le dispositif expérimental décrit précédemment que Joseph Fourier découvrit les séries trigonométriques, dites « séries de Fourier ». L'anneau est chauffé comme précédemment en $\theta = 0$ puis enfoui presque complètement dans du sable, excellent isolant thermique. On suppose qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale

de l'anneau une fois que celui-ci est enfoui dans le sable et que la température reste de la forme $T(\theta, t)$. On s'intéresse toujours au domaine $\theta \in]-\pi; \pi]$, avec $T(-\theta, t) = T(\theta, t)$ par symétrie.

- – 21. Donner l'équation vérifiée par $T(\theta, t)$. On cherche les solutions à variable séparée de la forme $T_n(\theta, t) = f_n(\theta) g_n(t)$. L'interprétation de l'indice n apparaîtra dans la donnée de la condition initiale nécessaire à la résolution complète de l'équation. Déterminer les expressions générales de $f_n(\theta)$ et $g_n(t)$ puis montrer que $T_n(\theta, t)$ s'écrit sous la forme

$$T_n(\theta, t) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) e^{-t/\tau_n}.$$

On donnera la relation entre τ_n et d_n et on précisera leurs dimensions respectives.

- – 22. À l'instant $t = 0$, la température initiale d'une section repérée par l'angle θ est une fonction $T_0(\theta)$, symétrique, de période 2π et dont le développement en série de Fourier est de la forme

$$T_0(\theta) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\theta).$$

Les coefficients b_n sont supposés connus. Que représente la constante T_m ? Justifier précisément pourquoi la solution générale $T(\theta, t)$ peut se mettre sous la forme

$$T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta, t).$$

Expliciter B_n , d_n et τ_n en fonction de b_n , n , R , μ , c et λ .

- – 23. Joseph Fourier remarque, en mesurant la température en fonction du temps en différents points de l'anneau, que $T(\theta, t) - T_m$ devient rapidement proportionnel à $\cos(\theta)$. Commenter cette constatation.

Dans tout le problème, exprimer signifie donner l'expression littérale et calculer signifie donner la valeur numérique avec, au plus, deux chiffres significatifs.

Les vecteurs unitaires seront notés avec un chapeau $\hat{\cdot}$, ainsi, dans l'espace cartésien $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ un vecteur quelconque \vec{a} s'écrira $\vec{a} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z$. On note j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

Données numériques

- Masse volumique de l'air : $\mu_0 = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Capacité thermique massique du fer : $c = 4,0 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Masse volumique du fer : $\mu_f = 7,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Conductivité thermique du fer : $\lambda = 80 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Coefficient conducto-convectif à l'interface fer-air : $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

Pour s'alimenter Mark Watney fait pousser des pommes de terre dans le sol martien en utilisant les selles récupérées dans les toilettes de la mission. Les selles contiennent des bactéries nécessaires à une culture. Néanmoins, les sondes Viking ont montré qu'un tel sol, particulièrement oxydant, tue toutes les bactéries, à fortiori celles des selles. Dans cette partie, afin d'étudier l'action oxydante du sol sur les bactéries on utilise la bactérie *E. coli* comme organisme modèle et on modélise le stress oxydant par l'action du peroxyde d'hydrogène H_2O_2 .

VI.A – Métabolisme de la bactérie

Le peroxyde d'hydrogène est un sous-produit du métabolisme des cellules, sa production suit une cinétique d'ordre 0 de constante de vitesse $k_p = 15 \mu\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$. Pour lutter contre le peroxyde d'hydrogène, la bactérie a développé un arsenal de défense dont les principales actrices sont les enzymes alkylhydroperoxydase (notée Ahp) et catalase (notée Cat). Le peroxyde d'hydrogène est également capable de diffuser à travers la paroi de la bactérie. Dans la suite on considère que les concentrations à l'intérieur de la bactérie et à l'extérieur sont uniformes. Le modèle complet a été développé par Uhl et Dukan (PLOS One. 2016 ; 11(8)).

VI.A.1) La bactérie est modélisée par une sphère de volume total V_i de rayon externe R et d'épaisseur de paroi e . On note ϕ le flux de peroxyde d'hydrogène (en $\text{mol}\cdot\text{s}^{-1}$) sortant de la bactérie à travers sa paroi et D le coefficient de diffusion particulaire du peroxyde d'hydrogène dans la paroi.

Dans l'hypothèse d'un régime stationnaire, on définit une résistance particulaire R_p à l'aide de l'expression

$$\phi = \frac{[H_2O_2]_i - [H_2O_2]_e}{R_p}$$

où $[H_2O_2]_i$ est la concentration en peroxyde d'hydrogène à l'intérieur de la bactérie et $[H_2O_2]_e$ sa concentration dans le milieu extérieur.

Q 31. Citer deux autres domaines de la physique utilisant la notion de résistance. Préciser les analogies.

Q 32. Exprimer R_p en fonction de e , D et R .

Q 33. Simplifier cette expression dans l'hypothèse où $e \ll R$.

Q 34. Proposer une valeur numérique de R_p .

Q 35. Montrer que la loi de cinétique de diffusion à travers la membrane peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d[H_2O_2]_i}{dt} = \pm k_d([H_2O_2]_i - [H_2O_2]_e)$$

Q 36. Quel signe doit-on choisir sachant que $k_d > 0$? Exprimer k_d en fonction de e , D et R et proposer une application numérique.

VI.A.2) Les enzymes présentes dans la bactérie obéissent à une cinétique, dite michaelienne, où la vitesse de réaction a la forme générale

$$v = -\frac{d[S]}{dt} = \frac{v_{\max}[S]}{[S] + K_M}$$

où v_{\max} et K_M (constante de Michaelis) sont des constantes caractéristiques de l'enzyme et S représente le composé chimique décomposé par l'enzyme.

Q 37. Quelle est la dimension de la constante K_M ? Quel sens concret peut-on donner au paramètre K_M ?

VI.A.3) La dynamique du peroxyde d'hydrogène est donc décrite par le système présenté figure 8.

Réactions associées à H_2O_2	Équations chimiques	Loi de vitesse
Production métabolique	$\emptyset \rightarrow H_2O_2$	ordre 0
Décomposition par Ahp	$H_2O_2 \rightarrow H_2O + \frac{1}{2}O_2$	$v^{\text{Ahp}} = \frac{v_{\max}^{\text{Ahp}}[H_2O_2]}{[H_2O_2] + K_M^{\text{Ahp}}}$
Décomposition par Cat	$H_2O_2 \rightarrow H_2O + \frac{1}{2}O_2$	$v^{\text{Cat}} = \frac{v_{\max}^{\text{Cat}}[H_2O_2]}{[H_2O_2] + K_M^{\text{Cat}}}$
Diffusion membranaire	$H_2O_2 \rightarrow \text{extérieur}$	$v = \pm k_d([H_2O_2]_i - [H_2O_2]_e)$

Figure 8

On note N le nombre de bactéries dans le milieu extérieur. Le volume extérieur est noté V_e . La densité de bactéries est alors notée $n = N/V_e$.

Troisième partie – Peut-on cultiver des pommes de terre sur Mars ? Seul sur Mars ! Le film

La réaction de dismutation du peroxyde d'hydrogène $H_2O_2 \rightarrow H_2O + \frac{1}{2}O_2$ est pilotée à 25°C par une constante de réaction de 10^{18} rendant la réaction totale.

Q 40. Donner les équations différentielles associées au système dynamique ci-dessus vérifiées par $[H_2O_2]_i$ et $[H_2O_2]_e$.

En condition physiologique, sans stress exogène, on admet que $[H_2O_2] \ll K_M^{\text{Ahp}}$ et $[H_2O_2] \ll K_M^{\text{Cat}}$. Ces hypothèses seront vérifiées à postériori.

Q 41. Déterminer la concentration en peroxyde d'hydrogène à l'équilibre à l'intérieur des cellules.

Q 42. Faire l'application numérique, commenter.

VI.B – Situation de stress oxydant

On considère désormais une situation de stress oxydant produit par l'ajout d'une importante quantité de peroxyde d'hydrogène exogène (c'est-à-dire introduite à l'extérieur de la bactérie) : on suppose que les bactéries se trouvent dans un milieu où la concentration extérieure en peroxyde d'hydrogène vaut initialement 1 mol \cdot L $^{-1}$.

Tant que la concentration exogène est très élevée, les bactéries sont submergées et par conséquent elles voient leur concentration interne en peroxyde d'hydrogène atteindre quasi instantanément la valeur exogène (la diffusion n'est plus limitante).

Q 43. Proposer une approximation à l'équation différentielle vérifiée par $[H_2O_2]_i$ dans le cas du stress exogène proposé (tant qu'il est important).

Q 44. En déduire la quantité (en mole) de peroxyde d'hydrogène décomposé par seconde et par bactérie.

Q 45. Combien de temps faudra-t-il à $n = 10^7$ bactéries par mL pour décomposer la moitié du peroxyde d'hydrogène externe introduit ? Même question pour 10^9 bactéries par mL. Commenter.

Au sujet de *E. coli*

Notation	Valeurs
k_p	$15 \mu\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$
K_M^{Cat}	$5,9 \times 10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$
K_M^{Ahp}	$1,2 \times 10^{-6} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$
v_{\max}^{Cat}	$4,9 \times 10^{-1} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$
v_{\max}^{Ahp}	$6,6 \times 10^{-4} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$
D	$2,0 \times 10^{-13} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
V_i	$3,2 \times 10^{-15} \text{ L}$
e	9 nm