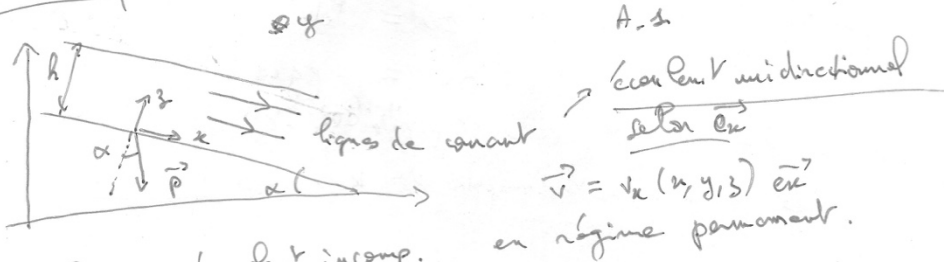


Partie I - Écoulement d'un glacier

ESA. PSE 2013

A. Étude préliminaire (écoulement d'une couche de miel)



A.2 - Pour un écoulement incomp.

et homogène : $\text{div } \vec{v} = 0$

avec $\vec{v} = v(z) \vec{e}_x \rightarrow \text{div } \vec{v} = \frac{dv(z)}{dz} = 0$ est vérifiée

$\hookrightarrow$ cette forme du champ de vitesse est donc compatible avec l'écoulement incomp (et v est indpt de x !)

De plus, les dimensions du syst. selon x et y st très supérieures à l'épaisseur h , de telle sorte que la couche peut être considérée comme ∞ selon x et $y \rightarrow$ invariance par translat.

$\vec{v} = v(x, y, z) \vec{e}_x = v(z) \vec{e}_x$.

A.3 - Rq: on reconnaît le bilan de force appliqué à une particule de fluide de masse $dm = \rho dV \Rightarrow dm \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho dV \frac{D\vec{v}}{Dt}$

ici $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \left(v \frac{\partial}{\partial x} \right) \vec{v} = v \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x = \frac{v^2}{x} \vec{e}_x$

" $\vec{0}$ " car régime stationnaire

donc $[\Sigma \vec{F} = \vec{0}]$! ici $\Delta \vec{v} = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \vec{e}_x$

A.4 - Projéctos sur la base

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \sin \alpha + \eta \frac{d^2 v}{dz^2} \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} \rightarrow P \text{ indpt de } y \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \cos \alpha \end{cases}$$

A.5. Intégrons le résultat de la proj. sur $\vec{e}_z$:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \cos \alpha \Rightarrow P(x, z) = -\rho g \cos \alpha z + C(x)$$

Exploiter la CL : $P(x, z=h) = P_{\text{atm}}$

$$\rightarrow P_{\text{atm}} = -\rho g \cos \alpha h + C(x) \quad (\forall x)$$

Comme $P_{\text{atm}} = \text{cste}$, la seule possibilité est $C(x) = K = \text{cste}$

$\hookrightarrow$ la pression est indpt de x ! $\rightarrow P = P(z)$

$$K = P_{\text{atm}} + \rho g \cos \alpha h$$

donc $P(z) = \rho g \cos \alpha (h - z) + P_{\text{atm}}$ $\rightarrow$ la press varie linéairement

Δ elle est bien la forte en $z=0$!

A.6 - Exploiter le résultat de la projéct sur $\vec{e}_x$:

$$0 = \rho g \sin \alpha + \eta \frac{d^2 v}{dz^2} \rightarrow \frac{d^2 v}{dz^2} + k \sin \alpha = 0$$

avec $k = \frac{\rho g}{\eta}$

A.7 - Conditions aux limites :

$\rightarrow$ en $z=0$: la condit d'adhérence du fluide visqueux sur sa support fixe impose la nullité de la vitesse

$$v(z=0) = 0$$

$\rightarrow$ en $z=h$: la contrainte tangentielle n'est autre que la force de viscosité de l'air sur le miel, et

$$d\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{fluide}} = -\eta \left(\frac{dv}{dz} \right)_{z=h} dS \vec{e}_x = \vec{0}$$

En effet, l'air très finement visqueux impose une contrainte négligeable.

donc $\left[\frac{dv}{dz} \right]_{z=h} = 0$

A.8 - $\frac{dv}{dz} + k \sin \alpha = 0 \xrightarrow{\text{intégrer}} \frac{dv}{dz} = -k \sin \alpha z + A$

avec $\left[\frac{dv}{dz} \right]_{z=h} = 0 \rightarrow 0 = -k \sin \alpha h + A \rightarrow A = k \sin \alpha$

donc $\frac{dv}{dz} = k \sin \alpha (h - z) \xrightarrow{\text{intégrer}} v = k \sin \alpha \left(hz - \frac{z^2}{2} \right) + B$

avec $v(z=0) = 0 \Rightarrow 0 = B$!

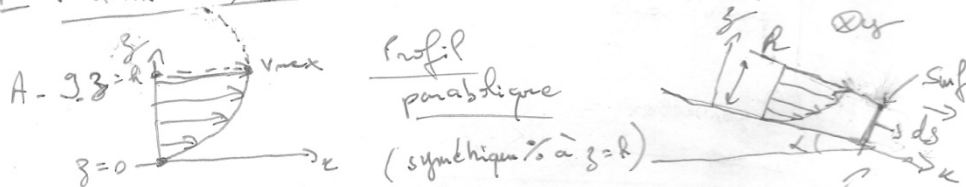
donc $v(z) = \frac{k \sin \alpha}{2} z (2h - z)$

$v(z) = \beta z (2h - z)$ avec $\beta = \frac{k \sin \alpha}{2}$
 $\hookrightarrow$ profil parabolique

Vitesse max : $\frac{dv}{dz} = \beta (2h - z) = \beta z = \beta (2h - z) = 0$
 pour $z = h$

$v_{\max} = v(z=h) = \beta h^2$ et $\beta = \frac{k \sin \alpha}{2} = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta}$

AN : $v_{\max} = 1,1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ et naturellement $v_{\max} \sin \theta$



A.10 - Débit volumique $Q_v = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = dz dy \vec{e}_x$
 $W \gg h$ la vitesse ne dépend pas de y ! On peut intégrer selon y !

$Q_v = \iint_S v dz dy = W \int_{z=0}^{z=h} v(z) dz$

$Q_v = \beta W \int_{z=0}^{z=h} (2hz - z^2) dz = \beta W \left[\frac{2h}{2} h^2 - \frac{1}{3} h^3 \right] = \frac{2}{3} \beta W h^3$

$Q_v = \frac{2}{3} \beta W h^3$ et $Q_v = \langle v \rangle \times S = \langle v \rangle \times W h$

Rp) $Q_v = \frac{1}{3} \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} W h^3$ à comparer par exemple à $Q_v = \frac{\Delta P}{R_{\text{hydra}}}$
 ici l'écoulement n'est pas provoqué par une différence de pression mais par la force de gravité. On pourrait aussi déf. une résistance hydraulique ...

$\langle v \rangle = \frac{Q_v}{W h} = \frac{2}{3} \beta h^2$

et $\langle v \rangle = \frac{2}{3} v_{\max}$

A.11 - $\tau_{\text{diff}} \text{ de qte de mtr par viscosité} = \frac{L^2}{\eta/c}$
 $\tau_{\text{convection}} = \frac{L}{\langle v \rangle}$ distance hyppique

$Re = \frac{\rho(v)h}{\eta}$
 $Re = 10^{-4} \ll 1$ régime fortement laminaire

$Re = \frac{\tau_{\text{diff}}}{\tau_{\text{conv}}}$ si $Re \ll 1$ $\tau_{\text{diff}} \ll \tau_{\text{conv}}$
 $\hookrightarrow$ la diff. + rapide domine
 régime laminaire
 et inversement si $Re \gg 1$ régime turbulent

B - Dynamique d'un glacier

B.1 - $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x = \vec{0}!$ Le $\vec{u}$

or $\Delta \vec{v} = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \vec{e}_x$

seule la p.g. sur $\vec{e}_x$ est modifiée/

$$\eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g \sin \alpha = 0 \quad \left(\text{avec } \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \right)$$

B.2 - $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} = 0$

$$\frac{v_0}{a^2} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} \right) + \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + 1 = 0$$

B.3 - sur les bords du glacier, la vitesse est nulle et on néglige la contrainte tangentielle $\rightarrow \sqrt{v'(y'=0)} = v'(y' = \pm \frac{1}{2}) = 0$

$$\rightarrow \frac{dv'}{dz'} \left(z' = \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (\text{car } \alpha = 2R)$$

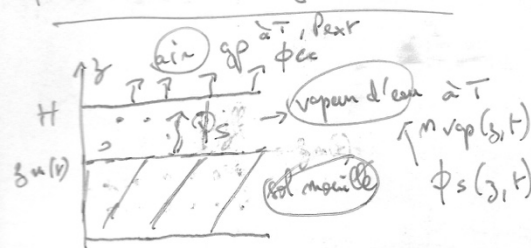
B.4 - $v_{\max} \approx 0,057$

B.6 - distance (A)-(A+5) au centre $\approx 1,03 \text{ km}$

$$v_{\max} = 110 \text{ m. an}^{-1} = 3 \mu\text{m. s}^{-1} \quad \text{et } v_{\text{moy}} = \frac{2}{3} v_{\max} = 2 \mu\text{m. s}^{-1}$$

B.7 - $\frac{v_{\max}}{v'_{\max}} = \frac{\rho g \sin \alpha a^2}{\eta} \rightarrow \eta = 10^{15} \text{ Pa. s}$
Le glacier avec ses lignes de balises valide le modèle de fluide newtonien.

Partie II - Séchage des sols CCINPSSI 2021



$$\phi_{cc} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

avec $\vec{j}_{cc} = h(P(H) - P_{ext}) \vec{e}_z$

B.3.1 - la pression de vap. saturante est la pression d'équilibre liq/vapide. l'eau sous forme gazeuse.

B.3.2 - Le courant d'évaporation au niveau du sol est pilotée par la diff. la pression partielle de l'eau entre $z = H$ et la press. partielle de l'air "au loin" de cette surface. La press. partielle de l'air au voisinage immédiat est supérieure à la press. partielle de l'eau, ce qui a tendance à homogénéiser le milieu extérieur et donc la pression partielle extérieure P_{ext} et favorise l'évaporation. ($\vec{j} \uparrow$), et certainement modifier la vapeur.

B.3.3 - $\vec{j}_{cc} = -D \text{ grad } m \rightarrow$ loi de Fick

$\vec{j}$ vecteur densité de courant particulière en $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$
 D coefficient de diff. en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; m densité particulière en m^{-3}

B.3.4 - $\vec{j}(z) = \vec{j}(z+dz)$
 $dV = S dz$
Bilan de part. en régime stationnaire:
 $dN = 0 = [\phi_s(z) - \phi_s(z+dz)] dV$
particules entrantes en z particules sortantes en $z+dz$

donc $\frac{d\phi}{dz} = 0$ ou $\phi_s(z+dz) = \phi_s(z)$
(avec $\phi = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$) $\rightarrow$ le débit ϕ_s est uniforme (conservation)

Q35. $\phi = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = j_s = -D \frac{dn_{vap}}{dz} S = \text{cte} = \phi_s$
 (uniforme sur S)

donc par intégrat $\rightarrow m_{vap}(z) = -\frac{\phi_s}{DS} z + K$

Avec la CL $\rightarrow m_{vap}(z_m) = -\frac{\phi_s}{DS} z_m + K$
 en z_m

$\hookrightarrow K = \frac{\phi_s}{DS} z_m + m_{vap}(z_m)$

donc $m_{vap}(z) = -\frac{\phi_s}{DS} (z - z_m) + m_{vap}(z_m)$

Q36 - [Vapeur d'eau $\leq$ gaz] avec $M = \text{masse de mol} \times \frac{N_A}{\text{mol}}$
 $P V = \text{masse de mol} \times R T$
 $\frac{\text{masse de mol}}{V} = \frac{P}{R T}$
 en $z = z_m$ eq. liq/gaz $P = P_{SAT}$
 $m_{vap}(z_m) = N_A \frac{P_{SAT}(T)}{R T}$

Q34 - $m_{vap}(z) = N_A \frac{P_{SAT}(T)}{R T} - \frac{\phi_s}{DS} (z - z_m)$

Q38 - C_p à la hauteur H avec $m_{vap}(H)$
 $P(H) = m_{vap}(H) \frac{R T}{N_A} = P_{SAT}(T) - \frac{R T \phi_s}{N_A D S} (H - z_m)$

Kge) au début du processus d'évaporation $z_m = H$ et $P(H) = P_{SAT}(T)$
 équilibre liq/vapeur en $z = H$, l'évaporation ne peut
 débuter que si $P(H) = P_{SAT} > P_{ext}$ ($\vec{j} = h(P(H) - P_{ext})\vec{e}_z \neq 0!$)
 en $t=0$

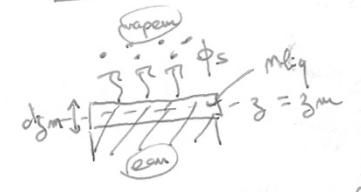
Un instant plus tard, z_m progresse ($\downarrow$), on retrouve P_{SAT}
 et $m_{vap}(z_m)$ en z_m mais en $z = H$ la densité particulière
 sera + faible comme la pression $P(H)$ (qui $\downarrow$ lentement avec le temps)
 ($m_{vap}(z) \downarrow$ avec z) qui sera + faible que P_{SAT} .
 à $t=0$ 

Q39 - Continuité du flux à l'interface sol-atmosphère :

$\phi_s = h(P(H) - P_{ext})S = hS(P_{SAT} - \frac{R T \phi_s}{N_A D S} (H - z_m) - P_{ext})$

$\phi_s (1 + \frac{R T h}{N_A D} (H - z_m)) = hS(P_{SAT} - P_{ext})$

$\phi_s = \frac{hS(P_{SAT} - P_{ext})}{1 + \frac{R T h}{N_A D} (H - z_m)}$

Q40 - 
 A. l'interface le volume dV de
 sol mouillé qui s'évapore pdr dr
 est $dV = dz_m S$
 le nombre de particules de liq transformées en vapeur qui s'en
 échappent $dN = \phi_s dt = m_{liq} dV = m_{liq} dz_m S$
 perdues $\hookrightarrow \frac{dz_m}{dt} = -\frac{\phi_s}{m_{liq} S}$

$$Q41 - \frac{dz_m}{dt} = - \frac{h}{m_{liq}} \frac{P_{SAT}(T) - P_{ext}}{1 + \frac{hRT}{N_A D} (H - z_m)}$$

$$dz_m \left(1 + \frac{H - z_m}{H_0} \right) = - \frac{h}{m_{liq}} (P_{SAT}(T) - P_{ext}) dt$$

$\hookrightarrow$ avec $H_0 = \frac{hRT}{N_A D}$

Le temps de séchage τ_s
 est donné en intégrant z_m entre 0 et H pour t entre 0 et τ_s

$$\int_0^H \left[1 + \frac{H}{H_0} - \frac{z_m}{H_0} \right] dz_m = - \frac{h}{m_{liq}} (P_{SAT}(T) - P_{ext}) \int_0^{\tau_s} dt$$

$$\left(1 + \frac{H}{H_0} \right) H - \frac{H^2}{2H_0} = H \left(1 + \frac{H}{2H_0} \right) = - \frac{h}{m_{liq}} (P_{SAT}(T) - P_{ext}) \tau_s$$

$$\tau_s = \frac{\left(1 + \frac{hRT H}{2 N_A D} \right) m_{liq} H}{h (P_{SAT}(T) - P_{ext})}$$

le temps de séchage τ
 + vite que H!
 (en effet $P(H) \downarrow$ et $z_m \uparrow$)
 $\downarrow$ le moteur de l'évaporation

$z_m(t)$ régime variable! noté τ_{diff} très lente. On a utilisé le régime ARQS pour la diffusion des port. de vapeur d'eau!
 valable si $\tau_{diff} \ll \tau_{sch}$ avec $\tau_{diff} = \frac{L^2}{D} = \frac{(1cm)^2}{5 \cdot 10^{-6}}$

$$= 2 \cdot 10^3 s = 2000 s \approx \frac{1}{2} h$$

et pour 1 cm $\tau_{sch} \approx 2,5 \text{ jours}$
 sur la fig 11!

ARQS valide!

Q42 - Ds l'expression de $\frac{dz_m}{dt}$ et τ_{sch} est apparue une hauteur caractéristique $H_{lim} = 2H_0 = 2 \frac{hRT}{N_A D}$

$$\text{et } \tau_{sch} = \frac{m_{liq}}{h (P_{SAT} - P_{ext})} H \left(1 + \frac{H}{H_{lim}} \right)$$

Q43 - Pour $H \ll H_{lim} \rightarrow \tau_{sch} \propto H \rightarrow$ aux tps courts $\ll$ heures
 $\hookrightarrow$ fig 12 et $H < 1 \text{ mm}$

AN: $H_0 \approx 4 \text{ mm!}$ en accord

Pour $H \gg H_{lim} \tau_{sch} \propto H^2$ pour $H > 1 \text{ cm}$
 $\hookrightarrow$ accord fig 11!

Partie II - Décantation dans le traitement des eaux

2012 PSI CCINP

II.1 - Décantation statique

214 - Appliquons le PFD à une particule de masse m ds le réf. galiléen du bassin : $m =$ masse de fluide déplacé

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = m_0 \vec{g} - 6\pi\eta r \vec{v} - \underbrace{m \vec{g}}_{\text{puissance d'Archimède}} \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta r}{m_0} \vec{v} = \frac{(m_0 - m) \vec{g}}{m_0} \rightarrow \left[\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau_c} = \frac{(m_0 - m) \vec{g}}{m_0} \right] \rightarrow \text{évolut. exp. de la vitesse}$$

En régime statio q's q's τ_c :

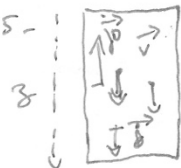
$$\tau_c = \frac{m_0}{6\pi\eta r} = \frac{2}{9} \frac{\rho_0 r^2}{\eta} \rightarrow m_0 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \text{ et } \vec{v} = v \vec{e}_z = v \vec{e}_g \rightarrow \text{En pris. sur } \vec{e}_g \rightarrow \frac{v}{\tau_c} = \frac{6\pi\eta r}{m_0} v = \frac{(m_0 - m) g}{m_0} = \left(1 - \frac{m}{m_0}\right) g = \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_0}\right) g$$

$$\frac{2}{9} \frac{\rho_0 r^2}{\eta} v = \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_0}\right) g \rightarrow v = \frac{2}{9} \frac{\rho_0 g r^2 (1 - \frac{\rho_c}{\rho_0})}{\eta}$$

$$v = \frac{2}{9} \frac{(\rho_0 - \rho_c) g r^2}{\eta} \text{ avec } v > 0!$$

215 -



$$\vec{j} = m \vec{v} \text{ avec } j \text{ en } m^{-2} \cdot s^{-1}$$

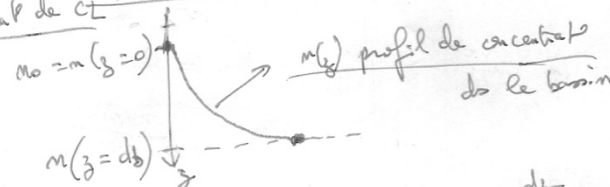
et $j(z) = m v \rightarrow$ courant de convect

216 - Loi de Fick : $\vec{j}_D = -D \vec{\text{grad}} m \rightarrow$ suite à la sédimentation des particules polluantes animées par $\vec{j}$, un gradient vertical de concentration apparaît dans le bassin avec une densité $m(z)$ + élevée vers le fond du bassin (z grand). Ce gradient donne donc naissance à un courant de diff., opposé au gradient, et orienté vers le haut $\rightarrow \vec{j}_D(z) = j_D(z) \vec{e}_z$ avec $j_D(z) < 0!$ (ascendant)

217 - En régime permanent, $\vec{j} = \vec{0} \rightarrow \vec{j}_D + \vec{j} = \vec{0}$ (compensat des courants)

$$-D \frac{dm}{dz} + m v = 0 \rightarrow \frac{dm}{dz} = \frac{v}{D} m = 0$$

Intégrat $\rightarrow m(z) = m_0 e^{\frac{v}{D} z}$ avec $\frac{v}{D} = \frac{1}{S}$ et S longueur caractéristique et délimitat de ct



218 - Considérons une tranche dz pour réaliser un bilan de masse de conservat du part. arrivat de part. ds le bassin. intégrons sur H le bassin.

$$N_0 dz \times S = m(z) S dz \rightarrow N_0 \times db = \int_{z=0}^{z=db} m(z) dz$$

$$N_0 db = \int_0^{db} m_0 e^{\frac{v}{D} z} dz = \frac{m_0 v}{D} \left[e^{\frac{v}{D} z} - 1 \right]$$

$$m_0 = N_0 \times \frac{db D}{v} \left[e^{\frac{v}{D} db} - 1 \right]$$

219 - $\tau_s = \frac{db}{v} \rightarrow$ temps de sédimentat pour traverser la hauteur db du bassin

$\tau_D = \frac{db^2}{D} \rightarrow$ temps de diff.

$$m_0 = N_0 \frac{\tau_D}{\tau_s} \left[e^{\frac{\tau_D}{\tau_s}} - 1 \right]$$

Il y aura clarificat de l'eau si $m_0 \ll N_0$ la sédimentat domine alors la diff. qui s'oppose à la clarificat

$$\text{soit } \frac{\tau_D}{\tau_s} \ll 1 \rightarrow \tau_D \gg \tau_s$$