

DS de Physique/Chimie 14 janvier 2026

PSI - Lycée du Parc des Loges

Durée 4H

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

- Les résultats numériques exprimés sans unité ou avec une unité fausse ne seront pas comptabilisés.
- Les explications qualitatives des phénomènes interviennent dans la notation au même titre que les calculs.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le candidat ou la candidate.

Partie I – Quelques aspects du système vasculaire

Le cœur est l'organe permettant la circulation du sang dans l'organisme. On s'intéresse en particulier aux contractions du ventricule gauche, qui expulsent le sang oxygéné vers l'aorte pour irriguer ensuite le reste du corps. Le sang circule dans les artères qui se subdivisent jusqu'à devenir des capillaires au niveau des organes. Les organes sont alimentés en nutriments et en oxygène. Le sang se charge alors en dioxyde de carbone, puis remonte ensuite vers le cœur par le système veineux.

II.1 - Modélisation du cœur

On utilise une description simplifiée dans laquelle le cœur est modélisé par une pompe (**figure 3**). On cherche à évaluer la puissance mécanique associée. On considère une pulsation cardiaque de 70 pulsations par minute. Le volume de sang expulsé à chaque pulsation est de 75 cm^3 . On suppose que la section S de l'aorte (artère qui chemine le sang depuis le cœur vers le système artériel) est égale à $3,0 \text{ cm}^2$.

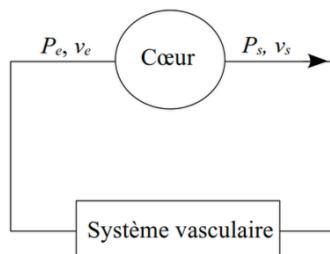


FIGURE 3 – Cœur et système vasculaire

On donne les caractéristiques suivantes :

- différences entre pressions d'entrée et de sortie : $P_s - P_e = 100 \text{ mbar}$;
- lien entre vitesses d'entrée et de sortie : $v_e = \frac{v_s}{2}$;
- l'énergie interne massique du sang, notée u , est supposée constante.

Q24. Déterminer la valeur numérique du débit volumique sanguin moyen D . En déduire la valeur numérique de la vitesse v_s du sang dans l'aorte.

Q25. Calculer le travail utile massique fourni par le cœur en supposant que celui-ci fonctionne comme une pompe adiabatique. En déduire la valeur numérique de la puissance fournie.

II.2 - Écoulement sanguin

On veut décrire l'écoulement du sang dans un vaisseau sanguin. Le vaisseau considéré est de forme cylindrique de longueur L et de rayon R . La longueur L est supposée très grande devant R . On assimile le sang à un fluide visqueux, incompressible et homogène. On note η la viscosité dynamique du sang et ρ sa masse volumique. On se place en régime permanent et on suppose que l'écoulement est laminaire. L'influence de la pesanteur est supposée négligeable. En notant Ox l'axe du cylindre, et en adoptant les coordonnées cylindriques, le champ de vitesses s'écrit $\vec{v}(M) = v(r, \theta, x)\vec{u}_x$.

Q26. À quelle condition sur le nombre de Reynolds l'hypothèse d'un écoulement laminaire est-elle vérifiée ?

On considère une portion cylindrique de fluide, de rayon r et de longueur L . On note P_1 la pression à l'entrée de cette portion de fluide et P_2 la pression en sortie.

Q27. Montrer que la vitesse ne dépend que de la variable r . Que vaut la vitesse du fluide en contact avec la paroi ?

Q28. La force par unité de surface s'exerçant sur l'élément de fluide considéré a pour expression : $\eta \frac{dv}{dr} \vec{u}_x$. Donner l'expression des forces de viscosité exercées sur cet élément de fluide.

Q29. Donner l'expression des forces de pression s'exerçant en amont et en aval du système.

Q30. Montrer que le champ de vitesse vérifie l'équation : $\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L} r$.
En déduire l'expression littérale du champ de vitesse $\vec{v}(M)$ dans le fluide.

Q31. Montrer que le débit volumique du fluide D_v vérifie : $D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (P_1 - P_2)$.

En déduire l'expression littérale de la vitesse moyenne v_m de l'écoulement en fonction de P_1 , P_2 , η et R .

Q32. On considère que les vaisseaux capillaires sont assimilables à des cylindres de longueur $L = 1,0 \text{ cm}$ et de rayon $R = 5,0 \mu\text{m}$. On supposera par ailleurs que la perte de charge le long d'un capillaire est typiquement de 10 kPa . Vérifier que l'hypothèse d'un écoulement laminaire est validée.

Q33. En supposant que l'ensemble des capillaires sont en dérivation et que la vitesse du sang dans un capillaire est de l'ordre de $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$, donner une estimation du nombre de capillaires présents dans le système vasculaire.

Partie II – Machine à pancakes

Conception d'un prototype de machine à pancakes

Traditionnellement servis au petit-déjeuner dans les pays d'Amérique du Nord (Canada, États-Unis), accompagnés par exemple de sirop d'érable, les pancakes sont des crêpes plus petites (5 à 10 cm de diamètre) et plus épaisses que les crêpes classiques. Ils sont aujourd'hui appréciés et dégustés dans le monde entier. Ce sujet étudie certains aspects de la conception d'un prototype de machine à poêles et distributeur de pâte à pancakes, transportable et peu encombrant, permettant de cuire à la maison des pancakes authentiques de manière ergonomique et automatisée.



Figure 1 – À gauche : assiette de pancakes nappés de sirop d'érable. À droite : perspective de design de la machine à pancakes, en vue de sa commercialisation

Déservoir de pâte de la machine

Le but du déversoir est de faire couler dans la poêle un volume de pâte à pancakes constant de manière automatisée. Trois options sont possibles pour sa réalisation : par électroaimant, par motorisation, par motorisation avec réservoir. La dernière solution sera retenue ; elle permet d'ailleurs de prévoir un déversoir de sirop d'érable fonctionnant sur le même actionneur (voir **figure 6**). On cherche à déterminer le temps de coulée de la pâte en fonction des différents paramètres du réservoir et du fluide afin de connaître la durée pendant laquelle l'actionneur doit laisser s'écouler la pâte.

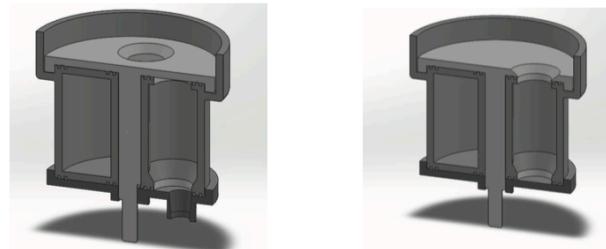


Figure 6 – Déversoir par motorisation avec réservoir : principe de fonctionnement

II.1 - Modèle parfait

On modélise le réservoir par un cylindre de rayon R_1 , rempli de pâte sur une hauteur h_0 à l'instant initial, baignant dans l'air atmosphérique à pression P_0 . En ouvrant le réservoir en son fond à l'instant $t = 0$, la pâte s'écoule à l'air libre à travers une section cylindrique de rayon R_2 ; $h_p(t)$ désigne la hauteur de pâte encore présente dans le réservoir à l'instant t . On note ρ la masse volumique de la pâte et \vec{g} l'accélération de la pesanteur.

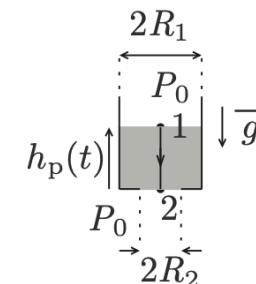


Figure 7 – Vidange du réservoir : notations utilisées

Dans une première approche, on néglige toute dissipation d'énergie au sein de l'écoulement de pâte. On propose alors d'utiliser la relation de Bernoulli entre les points 1 et 2 de la ligne de courant représentée sur la **figure 7**.

- Q16.** Rappeler la relation de Bernoulli, ainsi que ses conditions d'application. On supposera ces conditions remplies dans le cadre de ce premier modèle.
- Q17.** L'écoulement étant supposé incompressible, trouver une relation liant les vitesses $v_1(t)$ et $v_2(t)$ de la pâte à l'instant t au niveau des sections de rayons respectifs R_1 et R_2 .

Q18. Déterminer une expression de $v_2(t)$ en fonction de g , $h_p(t)$, R_1 et de R_2 uniquement.

Q19. En identifiant $v_1(t)$ à $-dh_p/dt$, déduire de la question précédente une équation différentielle régissant l'évolution de $h_p(t)$.

Q20. Résoudre cette équation différentielle par séparation des variables, puis montrer que la durée totale de vidange du réservoir s'exprime par :

$$\tau_p = \sqrt{\frac{2h_0}{g} \left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 - 1 \right]}. \quad (10)$$

Q21. Calculer numériquement τ_p . On trouve un temps de vidange expérimental $\tau_{\text{exp}} = 1,5$ s. Qu'en pensez-vous ?

II.2 - Modèle visqueux

On propose un deuxième modèle tenant compte des effets visqueux. On note η la viscosité dynamique de la pâte. Pour simplifier la modélisation, on assimile le réservoir à un cylindre de rayon R_1 , ce qui revient à négliger l'effet du rétrécissement de section de R_1 à R_2 . La dissipation d'énergie au sein de l'écoulement de pâte s'accompagne d'un terme de perte de charge régulière le long de la hauteur de pâte $h_v(t)$ à l'instant t , homogène à une pression et donné par la loi de Darcy-Weisbach :

$$\Delta P_c = \Lambda \frac{\rho v_m^2}{2} \frac{h_v(t)}{d} \quad \text{avec} \quad \Lambda = \frac{64}{Re}. \quad (11)$$

Dans cette expression, $v_m = -dh_v/dt$ représente la vitesse débitante (ou vitesse moyenne) de l'écoulement dans le réservoir, $d = 2R_1$ le diamètre du réservoir et Re le nombre de Reynolds. On a $h_v(t=0) = h_0$.

Q22. Évaluer l'ordre de grandeur de v_m en utilisant le temps τ_{exp} donné à la question Q21.

Rappeler la définition du nombre de Reynolds Re en fonction de ρ , v_m , η et de d , puis estimer sa valeur pour l'écoulement étudié. L'expression de Λ proposée étant valable dans la limite $Re < 2 \cdot 10^3$, vérifier la validité de cette formule.

Q23. Appliquer la relation de Bernoulli généralisée tenant compte de cette perte de charge entre les points 1 et 2 (voir figure 7) et obtenir une expression de dh_v/dt en fonction de ρ , g , R_1 et de η . On rappelle que l'on néglige l'effet du rétrécissement.

Q24. Déterminer la loi d'évolution $h_v(t)$. En déduire la durée totale de vidange du réservoir τ_v .

Q25. Calculer numériquement τ_v et comparer à la valeur expérimentale de la question Q21.

Comment pourrait-on encore affiner la modélisation ?

Données pour la partie II

Accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Dimensions du réservoir : $R_1 = 1,0 \text{ cm}$, $R_2 = 0,70 \text{ cm}$

Hauteur initiale de pâte : $h_0 = 6,0 \text{ cm}$

Propriétés physiques de la pâte :

- Masse volumique : $\rho = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Viscosité dynamique : $\eta = 3,0 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Partie III - Autour du sirop d'érable

Le sirop d'érable, produit emblématique du Québec (province du Canada), est un concentré de sève d'érable recueillie en faisant des trous dans l'écorce de l'arbre au printemps.

III.1 - Manchon de sirop d'érable

Quand on prend du sirop d'érable pour l'étaler sur un pancake, il vaut mieux tourner la cuillère ou le couteau pour en prendre le plus possible et éviter d'en faire tomber. Afin de modéliser la situation, on considère un cylindre de rayon a et de longueur L tournant autour d'un axe horizontal à la vitesse angulaire Ω et entouré d'une couche d'épaisseur $h(\theta, t)$ de sirop d'érable, assimilable à un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η , plongé dans le champ de pesanteur \vec{g} (voir figure 8). On définit l'épaisseur moyenne du film liquide par :

$$h_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta, t) d\theta. \quad (12)$$

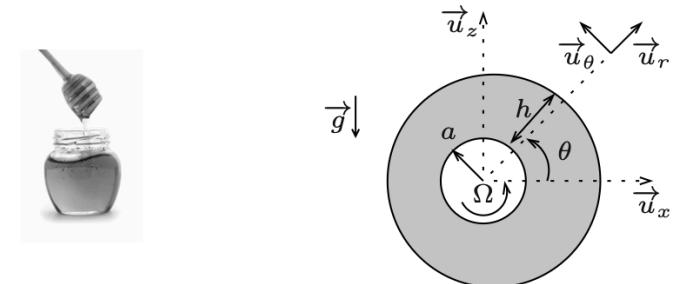


Figure 8 – Cylindre en rotation enduit de sirop d'érable (vue de côté) : notations utilisées

On cherche à étudier le régime stationnaire où l'épaisseur h du film de sirop ne dépend plus que de l'angle θ . On suppose l'épaisseur du film h faible devant le rayon a du cylindre et les déformations du film faibles devant h (dans un souci de lisibilité de la figure, les proportions ne sont pas respectées). Les effets de viscosité de l'air ambiant sont négligés et la pression est supposée uniforme au sein du film. L'étude étant menée en coordonnées cylindriques, on propose d'écrire le champ des vitesses dans le film sous la forme $\vec{v} = v(r, \theta, t) \hat{u}_\theta$. On admet que l'application de la 2^e loi de Newton à une particule de fluide au sein du film conduit à l'équation :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\rho g \cos \theta + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}. \quad (13)$$

Q26. En raisonnant sur les ordres de grandeur, déterminer une condition sur Ω vis-à-vis d'une quantité dépendant de η , ρ et de h_0 , permettant de négliger $\rho \partial v / \partial t$ devant $\eta \partial^2 v / \partial r^2$. Cette condition est-elle vérifiée ici ?

Sous cette condition, deux intégrations successives de cette relation permettent d'aboutir au champ des vitesses suivant :

$$v(r, \theta) = a\Omega + \frac{\rho g \cos \theta}{2\eta} [(r-a)^2 - 2(r-a)h]. \quad (14)$$

Q27. Vérifier que $v(r, \theta)$ satisfait à la condition aux limites imposée en $r = a$. Reproduire le schéma de la **figure 8** en y traçant le champ des vitesses en $\theta = 0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$.

Q28. Justifier que le débit volumique par unité de longueur de cylindre s'écrit :

$$Q(\theta) = \int_a^{a+h} v(r, \theta) dr \quad (15)$$

puis calculer cette intégrale en fonction de $h, \theta, g, \eta, \rho, a$ et de Ω .

Q29. En régime stationnaire, on admet que le débit ne dépend plus de θ : $Q(\theta) = Q$. En déduire un lien entre l'épaisseur h et l'angle θ sous la forme $F(h) = 0$, avec :

$$F(h) = \frac{\rho g}{3\eta} h^3 \cos \theta - \Omega ah + Q. \quad (16)$$

La **figure 9** illustre les allures de la fonction $F(h)$ selon le signe de $\cos \theta$. Pour $\cos \theta > 0$, deux comportements sont possibles selon que F s'annule ou pas dans le domaine $h > 0$.

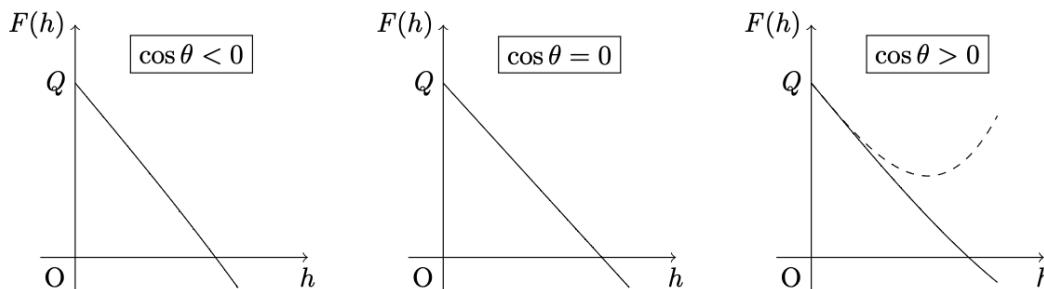


Figure 9 – Représentations graphiques de la fonction $F(h)$

Q30. En étudiant les variations de la fonction F pour un angle θ fixé, montrer qu'une solution à l'équation $F(h) = 0$ existe à condition d'avoir $Q < Q_{\max}(\theta)$, avec $Q_{\max}(\theta)$ une quantité à exprimer en fonction de θ, g, η, ρ, a et de Ω . Pour quelle condition sur Q existe-t-il alors une solution pour tout angle θ ?

Q31. En déduire littéralement la masse maximale de sirop d'érable que l'on peut ainsi maintenir autour du cylindre, par unité de longueur, en fonction de g, η, ρ, a et de Ω .

Données pour la sous-partie III.1

Propriétés physiques du sirop d'érable :

- Masse volumique : $\rho = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Viscosité dynamique : $\eta = 0,20 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Épaisseur moyenne du film liquide : $h_0 = 0,50 \text{ mm}$

Vitesse angulaire de rotation : $\Omega = 4\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Partie IV – Centrale nucléaire

Le principe de fonctionnement d'une centrale nucléaire est représenté **figure 7**. Le réacteur chauffe une certaine quantité d'eau qui circule, en boucle fermée, dans le circuit primaire. Cette eau permet de vaporiser l'eau contenue dans le circuit secondaire et dont la circulation assure la rotation de turbines couplées à des alternateurs. Le circuit tertiaire est utilisé pour liquéfier l'eau du circuit secondaire en sortie des turbines, avant qu'elle ne soit à nouveau injectée dans les générateurs de vapeur.

II.1 - Fonctionnement global

Une centrale nucléaire peut être vue comme une machine ditherme fonctionnant entre deux sources de chaleur :

- une source chaude (eau du circuit primaire) de température $T_C = 573 \text{ K}$;
- une source froide (eau de la Moselle) de température moyenne annuelle $T_F = 287 \text{ K}$.

Q27. Calculer le rendement η de la centrale sachant qu'il est égal à 60,0 % du rendement maximal de Carnot. Vous établirez tout d'abord l'expression du rendement de Carnot.

Q28. Exprimer la puissance thermique $\mathcal{P}_{\text{th}, C}$ reçue de la source chaude vers le fluide caloporteur en fonction de η et \mathcal{P} , puissance mécanique algébriquement reçue.

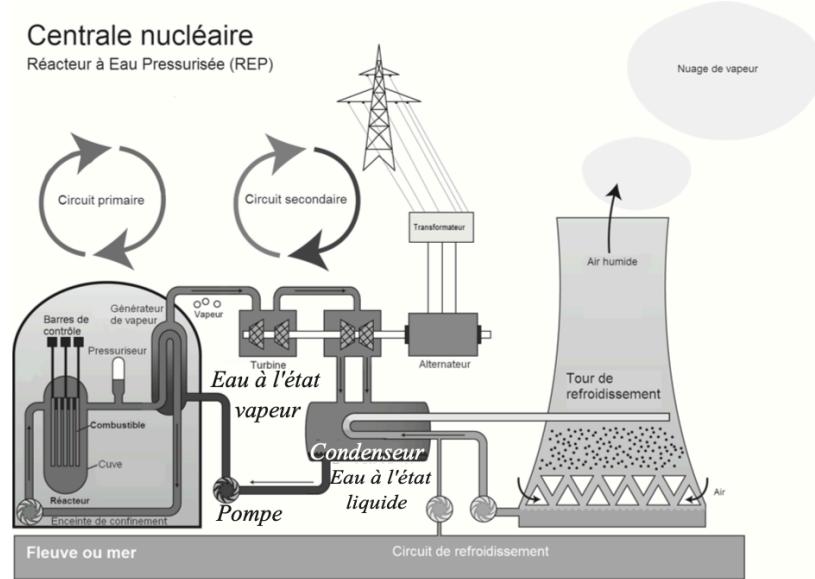


FIGURE 7 – Principe d'une centrale nucléaire (source : Wikipedia)

Q29. (*) Estimer la variation de température ΔT de l'eau de la Moselle due à la présence de la centrale nucléaire de Cattenom. Commenter la valeur obtenue.

Donnée numérique :

- Débit volumique annuel moyen de la Moselle : $D_V = 3,3 \cdot 10^2 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Document 1 - Centrale nucléaire - Site de Cattenom

Mise en service entre 1986 et 1991, la centrale de Cattenom située dans le département de la Moselle, participe activement au développement du tissu économique de la région. En 2020, les contrats passés avec des entreprises locales ont représenté plus de 35 millions d'euros d'investissement.

Une énergie sûre, neutre en $\text{CO}_{2(g)}$

La centrale nucléaire de Cattenom possède 4 réacteurs à eau pressurisée de 1 300 MWe (mégawatt électrique) chacun. En 2020, elle a produit 31,18 TWh d'électricité sans émettre de $\text{CO}_{2(g)}$, ce qui couvre les besoins de près de 6,8 millions de foyers français chaque année.

La surveillance de l'environnement

Certifiée ISO 14001 depuis 2004, la centrale surveille en permanence son impact sur l'environnement. En 2020, 6 850 prélèvements et 20 774 analyses ont été réalisés pour s'assurer de l'efficacité des démarches environnementales en vigueur.



FIGURE 8 – Photographie centrale nucléaire de Cattenom au bord de la Moselle

(Source : Document EDF)

II.2 - Puissance de la pompe du circuit secondaire

On fournit quelques caractéristiques de l'eau utilisée dans le circuit secondaire

- **À l'entrée de la pompe :**

- ★ État physique : eau liquide ;
- ★ Débit massique : $D_m = 640 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$;
- ★ Pression : $P_e = 18 \text{ bar}$;
- ★ Température : $T_e = 33^\circ\text{C}$.

- **En sortie de la pompe :**

- ★ État physique : eau liquide ;
- ★ Pression : $P_s = 70 \text{ bar}$;
- ★ Température : $T_s = 76^\circ\text{C}$.

Q30. Évaluer la puissance mécanique que la pompe doit fournir au fluide. L'évolution du fluide est supposée adiabatique à l'intérieur de celle-ci.

Q31. La pompe a un rendement de 60 %. En déduire la puissance électrique consommée par cette dernière.

Q32. La pression de l'eau arrivant dans le générateur de vapeur doit être égale à 70 bar. Les valeurs calculées précédemment ont été en fait sous-estimées. Quel phénomène négligé ici permet de l'expliquer ?

Centrale nucléaire

Réacteur à Eau Pressurisée (REP)

