

## II.1 - Modélisation du coeur

**Q24.** On a  $D = \frac{\text{volume pulsation}}{\text{durée pulsation}} \simeq 88 \text{ mL/s}$  avec la durée d'une pulsation égale à  $\frac{1}{70}$  min soit  $\frac{6}{7}$  s.

On obtient alors :  $v_s = \frac{D}{S} \simeq 29 \text{ cm/s}$

**Q25.** On applique le premier principe industriel :  $\Delta(h + e_c + e_p) = w_u + q$  avec ici :

- $q = 0$  car pompe adiabatique
- $\Delta e_p = 0$  car pas de variation d'altitude
- $\Delta e_c = \frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) = \frac{3}{8}v_s^2$
- $\Delta h = \Delta \left( u + \frac{P}{\rho_s} \right) = \frac{\Delta P}{\rho_s}$

d'où  $w_u = \frac{3}{8}v_s^2 + \frac{P_s - P_e}{\rho_s} \simeq 9,1 \text{ J/kg}$  puis une puissance  $\mathcal{P} = D_m w_u = \rho_s D w_u \simeq 0,87 \text{ W}$

## II.2 - Écoulement sanguin

**Q26.** Un écoulement dans une conduite cylindrique est laminaire si  $\text{Re} < 2.10^3$ .

**Q27.** L'écoulement étant stationnaire, la vitesse ne dépend pas du temps, comme indiqué dans l'énoncé. Par ailleurs, en négligeant l'influence de la pesanteur, l'écoulement est invariant par rotation d'angle  $\theta$  donc la vitesse ne dépend pas de cette variable.

Enfin, l'écoulement est homogène et incompressible donc  $\text{div } \vec{v} = 0$  ce qui implique que  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  et donc que  $v$  ne dépend pas de  $x$ .

En conclusion,  $v(r, \theta, x) = v(r)$ .

Du fait de la viscosité du fluide, on a  $v(r = R) = v_{\text{paroi}} = 0$ .

**Q28.** On a  $\vec{F}_v = \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r L \vec{u}_x$

**Q29.**  $\vec{F}_{p, \text{amont}} = P_1 \pi r^2 \vec{u}_x$  et  $\vec{F}_{p, \text{aval}} = -P_2 \pi r^2 \vec{u}_x$

**Q30.** On applique le principe fondamental de la dynamique au système précisé dans l'énoncé. Exprimons l'accélération d'une particule de fluide du système :

$$\vec{a}_{pf} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{0}$$

Ainsi, l'accélération globale du système est également nulle.

## Partie I – Système vasculaire

E3A PSI 2025

On a alors :  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_v + \vec{F}_p = \vec{0}$  puis, en projection selon  $\vec{u}_x$ , on obtient bien  $\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L} r$

On intègre l'expression précédente :  $v(r) = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta L} r^2 + A$

et on utilise la condition aux limites  $v(r = R) = 0$  donc  $\vec{v} = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4\eta L} \vec{u}_x$

**Q31.** On calcule le débit volumique :

$$D_v = \iint_{\text{section}} \vec{v} \cdot d^2\vec{S} = \iint_{\text{section}} \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4\eta L} r dr d\theta = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (P_1 - P_2) = D_v$$

La vitesse moyenne, également appelée vitesse débitante, est alors :

$$v_m = \frac{D_v}{\pi R^2} = \frac{(P_1 - P_2) R^2}{8\eta L}$$

**Q32.** Il faut calculer  $\text{Re} = \frac{2R v_m \rho_s}{\eta}$

On calcule d'abord  $v_m = 0,78 \text{ mm/s}$  puis on trouve  $\text{Re} = 2,1.10^{-3}$  donc l'écoulement est bien **laminaire**.

*Remarque : l'énoncé parle de "perte de charge" pour la perte de pression  $P_1 - P_2$  alors que, souvent, la charge est homogène à une longueur. Si la charge est définie comme une pression, la perte de charge serait d'ailleurs plutôt une perte de pression totale.*

**Q33.** On va utiliser le fait que l'écoulement est homogène et incompressible. Ainsi, le débit volumique se conserve et se "répartit" dans l'ensemble des capillaires en parallèle.

On a alors  $D = N.D_{v, \text{cap}} = N.\pi R^2 v_{\text{cap}}$  d'où  $N = \frac{D}{\pi R^2 v_{\text{cap}}} \simeq 10^9$

## Partie II – Machine à pancakes - Déservoir de pâte

E3A PSI 2022

## II.1 – Modèle parfait

### Q16. Théorème de Bernoulli :

Dans le cadre d'un écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible, la pression totale  $P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2$  se conserve le long d'une ligne de courant (en posant ( $Oz$ ) un axe vertical ascendant).

Appliqué à la situation de l'exercice, cela donne : 
$$P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Or :  $h_p(t) = z_1 - z_2$  et  $P_1 = P_2 = P_0$

D'où l'écriture de la relation de Bernoulli :  $\rho g h_p(t) + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Leftrightarrow g h_p(t) + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{1}{2} v_2^2$

Q17. L'écoulement étant supposé incompressible et homogène, la conservation du débit volumique donne :

$$D_{V,1} = D_{V,2} \Leftrightarrow v_1 \pi R_1^2 = v_2 \pi R_2^2 \Leftrightarrow v_1(t) = \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 v_2(t)$$

Q18. D'après Q16 et Q17, on obtient :  $\frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^4 \right) v_2^2 = g h_p(t) \Leftrightarrow v_2(t) = \sqrt{\frac{2 g h_p(t)}{1 - \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^4}}$

Q19. D'après Q17, on a :  $v_1(t) = \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 v_2(t) \Leftrightarrow -\frac{dh_p}{dt} = \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 \sqrt{\frac{2 g h_p(t)}{1 - \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^4}} \Leftrightarrow \frac{dh_p}{dt} = -\sqrt{\frac{2 g h_p(t)}{\left( \frac{R_1}{R_2} \right)^4 - 1}}$

Q20. Par séparation des variables, on obtient :  $\frac{dh_p}{\sqrt{h_p}} = -\sqrt{\frac{2g}{\left( \frac{R_1}{R_2} \right)^4 - 1}} dt$

On peut alors intégrer sur la durée de la vidange :

$$\int_{h_0}^0 \frac{dh_p}{\sqrt{h_p}} = -\sqrt{\frac{2g}{\left( \frac{R_1}{R_2} \right)^4 - 1}} \int_0^{\tau_p} dt \Leftrightarrow -\sqrt{h_0} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2g}{\left( \frac{R_1}{R_2} \right)^4 - 1}} \tau_p \Leftrightarrow \tau_p = \sqrt{\frac{2h_0}{g} \left[ \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^4 - 1 \right]}$$

Q21. AN :  $\tau_p = 0,20 \text{ s} \ll \tau_{exp} = 1,5 \text{ s}$  le temps de vidange a été nettement sous-estimé. Il aurait fallu prendre en compte la viscosité du fluide (la pâte).

## II.2 – Modèle visqueux

Q22. La vitesse moyenne peut-être estimée :  $v_m \approx \frac{h_0}{\tau_{exp}} = 4.10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$

Puis le nombre de Reynolds :  $Re = \frac{\rho d v_m}{\eta} = 3.10^{-1}$

On a bien  $Re < 2.10^3$  donc la loi de Darcy-Weisbach est valide.

Q23. La relation de Bernoulli généralisée s'écrit entre les points 1 et 2 :

$$\left( P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \right) - \left( P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \right) = \Delta P_c$$

Or on a toujours  $P_1 = P_2 = P_0$  et ici  $h_v(t) = z_1 - z_2$ , de plus on néglige l'effet du rétrécissement, donc  $R_1 = R_2$  ainsi  $v_1 = v_2$  (d'après Q17)

Alors :  $\rho g h_v = \frac{64\eta}{\rho d v_m} \frac{\rho v_m^2}{2} \frac{h_v}{d} \Leftrightarrow v_m = \frac{\rho g (2R_1)^2}{32\eta} \Leftrightarrow \frac{dh_v}{dt} = -\frac{\rho g R_1^2}{8\eta}$

Q24. En intégrant la relation précédente, sachant que  $h_v(t=0) = h_0$ , on obtient :  $h_v(t) = h_0 - \frac{\rho g R_1^2}{8\eta} t$

A la fin de la vidange, on a :  $h_v(\tau_v) = 0 \Leftrightarrow h_0 - \frac{\rho g R_1^2}{8\eta} \tau_v = 0 \Leftrightarrow \tau_v = \frac{8\eta h_0}{\rho g R_1^2}$

Q25. AN :  $\tau_v = 1,3 \text{ s}$

La valeur s'approche de celle de  $\tau_{exp} = 1,5 \text{ s}$  donnée en Q21... mais l'écart relatif est encore de 13%. Pour affiner la modélisation, il faudrait tenir du rétrécissement du cylindre de  $R_1$  à  $R_2$ , ce qui introduirait une **perte de charge singulière** (et on n'aurait plus  $v_1 = v_2$  ce qui avait simplifié l'expression de la différence des pressions totales en Q23).

### III Autour du sirop d'érable

#### III.1 Manchon de sirop d'érable

**Q26.** En ordre de grandeur, on a :  $\left| \rho \frac{\partial v}{\partial t} \right| \simeq \rho \frac{v}{T}$  avec  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  et  $\left| \eta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right| \simeq \eta \frac{v}{h_0}$

Ainsi

$$\left| \rho \frac{\partial v}{\partial t} \right| \ll \left| \eta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right| \Rightarrow \Omega \ll \frac{2\pi \eta}{\rho h_0^2} \simeq 4.10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

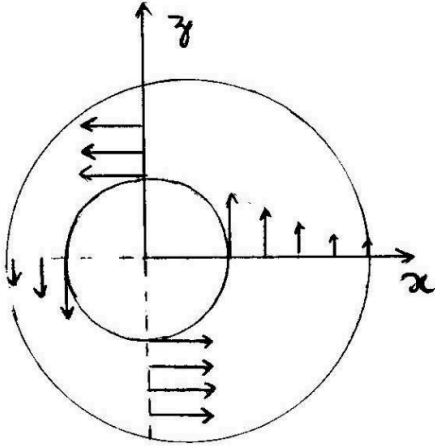
On a  $\Omega = 4\pi \text{ rad.s}^{-1}$  : cette condition est donc bien vérifiée ici.

**Q27.**  $\forall \theta$ ,  $v(r=a, \theta) = a\Omega$  donc l'expression de  $v(r, \theta)$  vérifie bien la condition aux limites imposée en

On a

$$\begin{cases} v(r, \theta=0) = a\Omega + \frac{\rho g}{2\eta} [(r-a)^2 - 2(r-a)h] \\ v(r, \theta=\pi/2) = v(r, \theta=3\pi/2) = a\Omega \quad \forall r \\ v(r, \theta=\pi) = a\Omega - \frac{\rho g}{2\eta} [(r-a)^2 - 2(r-a)h] \end{cases}$$

On obtient alors le champ des vitesses suivant :



**Q28.** Le débit volumique s'écrit :

$$D_v = \iint_S \vec{v} \cdot d^2\vec{S} = \iint_S v(r, \theta) dr dz = L \int_a^{a+h} v(r, \theta) dr$$

Le débit volumique par unité de longueur s'écrit donc :  $Q(\theta) = \frac{D_v}{L} = \int_a^{a+h} v(r, \theta) dr$

On calcule ensuite :

$$Q(\theta) = a\Omega h + \frac{\rho g \cos \theta}{2\eta} \int_a^{a+h} [(r-a)^2 - 2(r-a)h] dr = a\Omega h + \frac{\rho g \cos \theta}{2\eta} \left[ \frac{(r-a)^3}{3} - (r-a)^2 h \right]_a^{a+h}$$

soit  $Q(\theta) = a\Omega h - \frac{\rho g h^3 \cos \theta}{3\eta}$

**Q29.**

$$Q(\theta) = Q \Rightarrow a\Omega h - \frac{\rho g h^3 \cos \theta}{3\eta} = Q \Rightarrow \frac{\rho g h^3 \cos \theta}{3\eta} - a\Omega h + Q = 0$$

On retrouve bien  $F(h) = 0$  avec l'expression proposée par l'énoncé.

**Q30.** On dérive la fonction  $F(h)$  en  $F'(h) = \frac{\rho g h^2 \cos \theta}{\eta} - a\Omega$ . Cette dérivée s'annule en  $h_m = \sqrt{\frac{a\Omega \eta}{\rho g \cos \theta}}$ .

On calcule  $F(h_m) = Q - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(a\Omega)^3 \eta}{\rho g \cos \theta}}$ . On peut alors réaliser le tableau de variation de la fonction étudiée :

| $h$     | 0   | $h_m$    |   |
|---------|-----|----------|---|
| $F'(h)$ | —   | 0        | + |
| $F(h)$  | $Q$ | $F(h_m)$ |   |

Ainsi,  $F(h)$  ne peut s'annuler que si  $F(h_m) < 0$  soit si  $Q < \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(a\Omega)^3 \eta}{\rho g \cos \theta}} = Q_{\max}(\theta)$

Pour qu'il existe une solution pour tout angle  $\theta$ , il faut que l'inégalité précédente soit vérifiée dans le cas le plus contraignant, c'est-à-dire pour  $\cos \theta = 1$ .

On a alors  $Q < \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(a\Omega)^3 \eta}{\rho g}}$

**Q31.** En raisonnant par unité de longueur, on a

$$m_{\max} = D_{m,\max} \times T = \rho Q_{\max} \frac{2\pi}{\Omega} \quad \text{soit}$$

$$m_{\max} = \frac{4\pi \rho}{3\Omega} \sqrt{\frac{(a\Omega)^3 \eta}{\rho g}} = \frac{4\pi}{3\Omega} \sqrt{\frac{(a\Omega)^3 \rho \eta}{g}}$$

## Partie IV – Centrale nucléaire

### E3A PSI 2023

#### II.1 - Fonctionnement global

**Q27.** La centrale échange  $Q_c$  avec la source chaude,  $Q_f$  avec la froide et un travail  $W$  avec les turbines.  
Le premier principe appliqué sur un cycle décrit par la machine donne :

$$Q_c + Q_f + W = 0 \quad (1)$$

Le rendement de Carnot étant obtenu pour une machine totalement réversible, on en déduit que l'inégalité de Clausius devient :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \quad (2)$$

La centrale est assimilée à un moteur, donc son rendement est donné par :

$$\eta = -\frac{W}{Q_c} \quad (3)$$

En divisant (1) par  $Q_c$ , on obtient :

$$1 + \frac{Q_f}{Q_c} = \eta$$

L'équation (2) donne :  $\frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}$  ainsi, on en déduit le rendement de Carnot :

$$\eta_C = \frac{T_c - T_f}{T_c}$$

Le rendement de la centrale vaut donc :  $\underline{\eta = 0,6 \times \frac{T_c - T_f}{T_c} = 30\%}$ .

**Q28.** Par définition du rendement :

$$\eta = -\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{\text{th,C}}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{P}_{\text{th,C}} = -\frac{\mathcal{P}}{\eta}}$$

**Q29.** Le premier principe industriel appliqué sur l'eau de la Moselle en contact avec le circuit tertiaire donne la variation d'enthalpie entre l'amont et l'aval de la centrale :

$$D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_{\text{th,F}}$$

où  $D_m = D_V \rho_e$  est le débit massique du fleuve et  $\mathcal{P}_{\text{th,F}}$  est la puissance thermique échangée avec le fleuve.

En considérant l'eau comme une phase condensée :  $h_s - h_e = c_e \Delta T$  et d'après le premier principe :

$$\mathcal{P}_{\text{th,F}} = -\mathcal{P}_{\text{th,C}} - \mathcal{P} = \mathcal{P} \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right)$$

On en déduit donc :

$$D_V \rho_e c_e \Delta T = \mathcal{P} \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta T = \frac{\mathcal{P}}{D_V \rho_e c_e} \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right)}$$

Ainsi, numériquement :  $\underline{\Delta T = 8,8 \text{ K}^1}$ .

La valeur obtenue est élevée mais surévaluée dans la mesure où une partie des échanges thermiques avec la source froide sont effectués au niveau de la tour de refroidissement.

#### II.2 - Puissance de la pompe du circuit secondaire

**Q30.** Le premier principe industriel appliqué entre l'entrée et la sortie de la pompe donne :

$$D_m(h_{s,\text{pompe}} - h_{e,\text{pompe}}) = \mathcal{P}_{\text{méca}}$$

De même que précédemment :  $h_{s,\text{pompe}} = c_e T_s$  et  $h_{e,\text{pompe}} = c_e T_e$ . Ainsi :

$$\boxed{D_m c_e (T_s - T_e) = \mathcal{P}_{\text{méca}}}$$

Numériquement, on obtient :  $\underline{\mathcal{P}_{\text{méca}} = 0,12 \text{ GW}}$ .

**Q31.** Le rendement de la pompe est défini par :

$$\eta_{\text{pompe}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\mathcal{P}_{\text{élec}}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{P}_{\text{élec}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\eta_{\text{pompe}}}}$$

Numériquement, on obtient :  $\underline{\mathcal{P}_{\text{élec}} = 0,19 \text{ GW}}$ .

**Q32.** *Est-ce au programme ?*

Les pertes de charges au cours de l'écoulement ont été négligées.