

# Première partie – Centrale nucléaire

## Centrale PSI 2024

D'après l'extensivité de l'énergie interne

$$U_{\Sigma^*}(t) = U_{\Sigma}(t) + \delta m_{\text{entrant}} u_e = U_{\Sigma}(t) + D_{me} u_e dt$$

$$U_{\Sigma^*}(t + dt) = U_{\Sigma}(t) + \delta m_{\text{sortant}} u_s = U_{\Sigma}(t + dt) + D_{ms} dt u_s$$

où  $\delta m_{\text{entrant}} = D_{me} dt$  est la masse de fluide d'énergie interne  $u_e$  entrant dans  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$  avec le débit massique  $D_{me}$ , de même pour la masse de fluide sortant  $\delta m_{\text{sortant}}$ .

En régime stationnaire, la conservation de la masse implique  $D_{me} = D_{ms} = D_m$ , et la conservation des grandeurs dans  $\Sigma$  implique  $U_{\Sigma}(t) = U_{\Sigma}(t + dt)$ . La variation d'énergie interne du système fermé  $\Sigma^*$  entre  $t$  et  $t + dt$  s'écrit

$$dU_{\Sigma^*} = U_{\Sigma^*}(t + dt) - U_{\Sigma^*}(t) = D_m(u_s - u_e)dt$$

Le travail des forces de pression du fluide amont et du fluide aval sur le fluide contenu dans  $\Sigma^*$  pendant  $dt$  s'écrit, en supposant l'écoulement unidimensionnel

$$\delta W_{\text{amont}} = p_e S_e v_e dt = \frac{p_e}{\mu_e} D_m dt ; \quad \delta W_{\text{aval}} = p_s S_s v_s dt = \frac{p_s}{\mu_s} D_m dt$$

où  $p_e$ ,  $\mu_e$  et  $s_e$  sont les pression, masse volumique et section de l'écoulement amont,  $P_s$ ,  $\mu_s$  et  $s_s$  les pressions, masse volumique et section de l'écoulement aval.

Le premier principe appliqué à  $\Sigma^*$  entre  $t$  et  $t + dt$  s'écrit, en notant  $\mathcal{P}_u$  la puissance des forces extérieures, forces de pression amont et aval exceptées, et  $\mathcal{P}_{\text{th}}$  le flux thermique reçu

$$dU_{\Sigma^*} = D_m(u_s - u_e)dt = \left( \frac{p_e}{\mu_e} - \frac{p_s}{\mu_s} \right) D_m dt + \mathcal{P}_u dt + \mathcal{P}_{\text{th}} dt$$

soit

$$D_m \left( u_s + \frac{P_s}{\mu_s} - u_e - \frac{P_e}{\mu_e} \right) = D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{\text{th}}$$

où  $h$  désigne l'enthalpie massique.

En introduisant enfin le travail massique utile  $w_u = \mathcal{P}_u / D_m$  et le transfert thermique massique  $q = \mathcal{P}_{\text{th}} / D_m$ , le bilan thermique s'écrit

$$h_s - h_e = w_u + q$$

## II.B - Cycle de Hirn

**Q17)** D'après le formulaire, pour une masse quelconque d'eau liquide (phase condensée) traversant la pompe de manière isentropique

$$0 = \Delta S = C \ln \left( \frac{T_{\text{sortie}}}{T_{\text{entrée}}} \right)$$

d'où  $T_{\text{sortie}} \approx T_{\text{entrée}}$  (la relation précédente donnée par l'énoncé est approchée). Comme l'écoulement est stationnaire, les températures d'entrée et de sortie sont indépendantes du temps, donc  $T_1 \approx T_0$ .

Comme  $h_1 - h_0 = c_p(T_1 - T_0) \approx 0$  on en déduit  $h_1 \approx h_0$ .

D'après les relations  $\Delta S = C \ln(T_f - T_i)$  pour une phase condensée et  $\Delta h = c_p(T_f - T_i)$ , les isentropiques du diagramme des frigoristes dans la zone liquide sont confondues avec les isothermes et avec les isenthalpes : ce sont donc des segments verticaux.

**Q18)** Dans le diagramme des frigoristes :

- la courbe en cloche délimite le domaine diphasique liquide-vapeur ; elle est constituée
- de la courbe d'ébullition (partie située à basse enthalpie jusqu'au maximum qui correspond au point critique), qui correspond au liquide saturant,
- de la courbe de rosée (partie située à haute enthalpie, depuis le point critique) qui correspond à la vapeur saturante ;
- les courbes côté vapeur qui se confondent avec les verticales à basse pression sont les thermes (comportement du gaz parfait à basse pression, où l'enthalpie ne dépend que de la température) ;
- les courbes en pointillés tracées dans le domaine diphasique et le domaine de la vapeur ont une pente positive sont les isentropiques ;
- les isobares sont les horizontales, les isenthalpes les verticales.

Le tracé du cycle est déterminé de la manière suivante :

- le point 0 est un liquide saturé à la pression  $p_3 = 0,040$  bar : le point est à l'intersection de la courbe d'ébullition et de l'isobare  $p = 0,040$  bar ;
- la transformation  $0 \rightarrow 1$  est isentropique dans le domaine liquide jusqu'à la pression  $p_1 = 85,8$  bar : elle est représentée par une verticale (Q17) jusqu'à l'intersection avec l'isotherme  $T_1 = 500^\circ\text{C}$  ( $1'$ ) ;
- la transformation  $1 \rightarrow 2'$  est isobare donc représentée par une horizontale menée depuis le point (1), avec des intersections successives avec la courbe d'ébullition ( $1'$ ), la courbe de rosée ( $2$ ) et l'isotherme  $T_{2'} = 500^\circ\text{C}$  ( $2'$ ) ;
- la détente  $2' \rightarrow 3$  est isentropique, et ramène à la température  $T_0 = 29^\circ\text{C}$ , (3) étant situé dans le domaine diphasique, à l'intersection de l'isentropique menée depuis ( $2'$ ) et l'isobare  $p_3$ , puisque  $(T_0, p_3)$  correspond à un équilibre liquide-vapeur.

**Q19)** Pour l'état ( $2'$ ),  $T_{2'} = 500^\circ\text{C}$ ,  $p_{2'} = p_1 = 85,8$  bar, donc d'après l'énoncé  $s_{2'} = 6,68 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Comme la détente  $2' \rightarrow 3$  est isentropique,  $s_3 = s_{2'} = 6,68 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ . L'état (3) est un état dans le domaine diphasique de fraction massique en vapeur  $x$  à la pression 0,04 bar, donc on peut écrire

$$s_3 = x s_V(0,04 \text{ bar}) + (1 - x) s_L(0,04 \text{ bar})$$

$$x = \frac{s_3 - s_L(0,04 \text{ bar})}{s_V(0,04 \text{ bar}) - s_L(0,04 \text{ bar})} = \frac{6,68 - 0,42}{8,47 - 0,42} = 0,78$$

De même

$$h_3 = x h_V(0,04 \text{ bar}) + (1 - x) h_L(0,04 \text{ bar}) = 0,78 \times (2554 - 121) + 121 = 2,01 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$x = 0,78 ; h_3 = 2,01 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

**Q20)** Le travail massique utile  $w_u$  est fourni par la vapeur traversant la turbine, l'énergie massique dépensée  $q$  est fournie à l'eau sous forme de transfert thermique dans le générateur de vapeur. On peut donc définir le rendement par

$$\eta = \frac{w_u}{q}$$

Le premier principe appliqué à l'écoulement dans la turbine (transformation  $2' \rightarrow 3$  supposée adiabatique, et pour laquelle le travail massique reçu par le fluide vaut  $-w_u$ ) et dans le générateur de vapeur (transformation  $1 \rightarrow 2'$  supposée sans travail échangé) s'écrit

$$-w_u = h_3 - h_{2'} ; q = h_{2'} - h_1$$

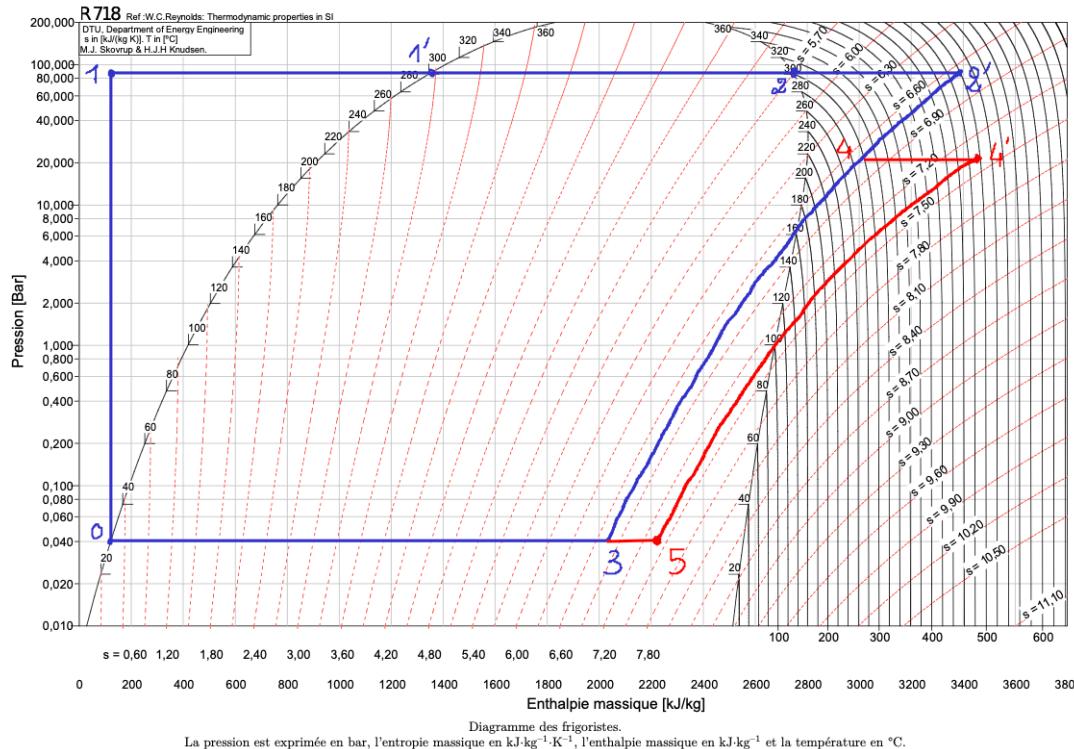


FIGURE 1 – cycles du circuit secondaire, surchauffe simple (Q18, bleu), double surchauffe (Q22, bleu et rouge)

d'où, comme la transformation  $0 \rightarrow 1$  est isenthalpe (Q17), avec  $h_1 = h_0 = h_L(0,04 \text{ bar}) = 121 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ , et en utilisant la donnée de l'énoncé  $h_{2'} = 3391 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et le résultat de la question Q19  $h_3 = 2,01 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

$$\eta = \frac{h_{2'} - h_3}{h_{2'} - h_1} = \frac{3391 - 2,01 \times 10^3}{3391 - 121} = 0,42$$

**Q21)** On écrit le premier et le second principe de la thermodynamique pour la machine réversible qui reçoit les transferts thermiques  $Q_C$  et  $Q_F$  des sources et le travail  $W$  ;

$$\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = Q_C + Q_F + W ; \Delta S = 0 = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S_{\text{créé}} = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F}$$

On déduit du second principe la relation

$$Q_F = -\frac{T_F}{T_C} Q_C$$

L'efficacité est définie par

$$\eta_C = \frac{-W}{Q_C} = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

Pour le fluide  $T_C = T_{2'} = 500^\circ\text{C} = 773\text{K}$  et  $T_F = T_0 = 29^\circ\text{C} = 302\text{K}$ , soit

$$\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{302}{773} = 0,61$$

$\eta < \eta_C$  car le rendement de Carnot est le rendement maximal qui puisse être obtenu pour un fluide évoluant au contact d'une source froide et d'une source chaude. L'écart s'explique par les irréversibilités du cycle réel.

## II.C - Cycle à double surchauffe

- Q22)**
- les états 0 (liquide saturé à  $T_0 = 29^\circ\text{C}$  donc  $p_3 = 0,04 \text{ bar}$ ), 1, 2 (vapeur saturante à  $T_2 = 300^\circ\text{C}$  donc  $p_2 = 85,8 \text{ bar}$ ) et 2' (vapeur sèche à  $T_{2'} = 500^\circ\text{C}$  et  $p_2 = 85,8 \text{ bar}$ ) correspondant à la compression isentropique, à la génération de vapeur et à la première surchauffe sont inchangés ;
  - la première détente suit l'isentropique depuis 2' jusqu'à son intersection avec l'isotherme  $T_4 = 300^\circ\text{C}$  ;
  - la seconde surchauffe suit l'isobare horizontale depuis 4 jusqu'à son intersection avec l'isotherme  $T_{4'} = 500^\circ\text{C}$  ;
  - la seconde détente suit l'isentropique depuis 4' jusqu'à son intersection avec la courbe de rosée ( $x = 1$ , état 5) ;
  - cependant cette intersection ( $T = 100^\circ\text{C}$ ,  $P = 1 \text{ bar}$  ne correspond ni à l'isotherme  $T_0 = 29^\circ\text{C}$  ni à l'isobare  $p_3 = 0,04 \text{ bar}$  auxquelles est censé correspondre la condensation 5 → 0 ;
  - si on suppose que la détente se poursuit jusqu'à la pression  $p_3$  l'état 5' est diphasé, avec  $h_{5'} \approx 2200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ , ce qui conduit à  $x_{5'} = 0,91$ , moins riche en liquide que le liquide obtenu avec une surchauffe simple (et valeur qui semble admise pour un fonctionnement correct d'une turbine, même si on peut difficilement dire que  $x \approx 1$ ).

En considérant l'état 5', on lit sur le diagramme les nouvelles valeurs :

$$h_4 = 3000 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} ; h_{4'} = 3450 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} ; h_{5'} = 2200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Le travail utile est récupéré sur les deux turbines supposées adiabatiques. Le travail massique reçu par la vapeur dans les turbines vaut

$$w_{2' \rightarrow 4} = h_4 - h_{2'} = 3000 - 3391 = -391 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} ; w_{4' \rightarrow 5'} = h_{5'} - h_{4'} = 2200 - 3450 = -1250 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

soit un travail massique utile

$$w_u = -(w_{2' \rightarrow 4} + w_{4' \rightarrow 5'}) = 1641 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

La chaleur massique à fournir à l'eau dans le générateur de vapeur et dans les deux surchauffes sans échange de travail vaut

$$q_{1 \rightarrow 2'} = h_{2'} - h_1 = 3391 - 121 = 3270 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} ; q_{4 \rightarrow 4'} = h_{4'} - h_4 = 3450 - 3000 = 450 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$q = 3720 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

On en déduit

$$\eta = \frac{1641}{3720} = 0,44$$

La double surchauffe améliore légèrement le rendement et permet d'obtenir un titre en vapeur plus élevé à la sortie de la turbine basse pression.

## II.D - Cycle réel d'une tranche nucléaire

**Q23)** On recherche les données utile dans le schéma et le tableau :

- L'eau du circuit secondaire reçoit de la chaleur de l'eau de refroidissement du cœur uniquement au niveau des générateurs de vapeur. D'après le tableau le débit massique de l'eau du circuit secondaire dans ces échangeurs vaut  $D_m$ , échangeur =  $5412,1 \text{ t} \cdot \text{h}^{-1}$  et l'enthalpie massique varie de  $h_e = 941,7 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  en entrée à  $h_s = 2788,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  en sortie ;
- le premier principe pour l'écoulement stationnaire en terme de puissance s'écrit pour les générateurs de vapeur

$$\mathcal{P}_{\text{th}, \text{GV}} = D_m(h_s - h_e) = \frac{5412,1 \times 10^3}{3600} \times (2788,4 \times 10^3 - 941,7 \times 10^3) = 2,78 \times 10^9 \text{ W}$$

$$\mathcal{P}_{\text{th}, \text{GV}} = 2,78 \text{ GW}$$

- Les réchauffeurs ne consomment aucune énergie extérieure, donc n'interviennent pas dans le calcul de l'efficacité ;
- En entrée de la turbine haute pression l'eau est caractérisée par un débit massique  $D_{m, \text{HP}}$  =  $5001,9 \text{ t} \cdot \text{h}^{-1}$  et une enthalpie massique  $h_e = 2787,1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . La turbine haute pression présente différentes sorties : vers les réchauffeurs  $R_6$ ,  $R_5$  et  $R_4$  et vers le sécheur-surchauffeur (qui correspond au même état que le prélèvement vers  $R_4$ ). Ces différentes sorties sont caractérisées par

sortie	$R_6$	$R_5$	$R_4$	sécheur-surchauffeur
$D_{m,i}(\text{t} \cdot \text{h}^{-1})$	214,3	208,4	402,1	4177,1
$h_i(\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$	2682,5	2622,6	2562,8	2562,8

Le premier principe pour la turbine haute pression permet de calculer la puissance utile fournie par le fluide (opposé de la puissance qu'il reçoit) :

$$\mathcal{P}_{\text{méca, HP}} = - \left( \sum_i (D_{m,i} h_{i, \text{sortie}}) - D_{m, \text{HP}} h_e \right) = 0,301 \text{ GW}$$

— On utilise la même démarche pour la turbine basse pression, alimentée par le sécheur surchauffeur ( $D_{m,\text{BP}} = 3704,0 \text{ t} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $h_e = 2970,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ), et dont les sorties alimentent les réchauffeurs R3, R2, R1 et le condenseur :

sortie	R3	R2	R1	condenseur
$D_{m,i} (\text{t} \cdot \text{h}^{-1})$	281,4	235,4	134,2	3053,0
$h_i (\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$	2731,5	2538,9	2377,8	2242,2

$$\mathcal{P}_{\text{méca,BP}} = - \left( \sum_i (D_{m,i} h_{i, \text{sortie}}) - D_{m, \text{BP}} h_e \right) = 0,687 \text{ GW}$$

— la puissance totale fournie par les turbines vaut donc

$$\mathcal{P}_u = 0,988 \text{ GW}$$

et le rendement global vaut

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_{\text{th, GV}}} = \frac{0,988}{2,78} = 0,355$$

## Deuxième partie – Le SPA

### Mines Pont PSI 2024

18. On va donc chercher à évaluer la variation de volume relative  $\Delta V/V$  d'une bulle d'air sous l'effet de la variation de pression hydrostatique  $\Delta P = \rho_e g h_e$  associée à la hauteur d'eau du spa. Si on assimile l'air dans la bulle à un gaz parfait, on peut dire que le produit  $PV$  de la bulle est constant, soit  $d(PV) = 0$  d'où :

$$\frac{\Delta V}{V} = - \frac{\Delta P}{P} = - \frac{\rho_e g h_e}{P_0} = - \frac{10^3 \times 10 \times 0,75}{10^5} = -0,075$$

19. On peut évaluer le nombre de Reynolds. Ici :

$$Re = \frac{\rho_e R V}{\eta_e} = \frac{10^3 \times 10^{-3} \times 0,3}{10^{-3}} = 3.10^2$$

et  $10^3$  si on prend une vitesse de  $0,3 \text{ m.s}^{-1}$ . Sur la figure, on note que pour ces valeurs de Reynolds, le coefficient de traînée est environ constant égal à  $C_x \sim 0,4$ . La force de traînée s'exprime alors :

$$F_t = \frac{1}{2} \rho_e C_x S v_b^2$$

où  $S = \pi R^2$  est la section droite de la bulle.

20. On peut écrire le PFD appliqué à une bulle de masse  $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_a$ , il donne :

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_a \frac{dv_b}{dt} = - \frac{1}{2} \rho_e C_x \pi R^2 v_b^2 - \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_a g + \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_e g$$

le dernier terme correspondant à la poussée d'Archimède. Le poids de la bulle pourrait être négligé. En simplifiant par  $\pi R^2$  et en réarrangeant les termes, on obtient :

$$\frac{dv_b}{dt} = - \frac{3 \rho_e C_x}{8 \rho_a R} v_b^2 + \frac{g(\rho_e - \rho_a)}{\rho_a}$$

et là on peut penser à une séparation de variables en essayant de s'appuyer sur les données de fin d'énoncé soit :

$$\frac{dv_b}{dt} = \frac{g(\rho_e - \rho_a)}{\rho_a} \left\{ 1 - \left( \frac{v_b}{v_1} \right)^2 \right\}$$

avec  $v_1 = \sqrt{\frac{8Rg(\rho_e - \rho_a)}{3C_x\rho_e}}$ . Si on pose  $x = \frac{v_b}{v_1}$  on obtient en séparant les variables (ici je suppose le  $C_x$  constant comme à la question 19, cela revient à supposer que le régime transitoire est très court) :

$$\frac{dx}{1-x^2} = \frac{g(\rho_e - \rho_a)}{\rho_a v_1} dt$$

dont l'intégration donne :

$$\operatorname{artanh}(x) + cste = \frac{g(\rho_e - \rho_a)}{\rho_a v_1} t$$

Or  $v_b(t=0)=0$ , donc  $x(t=0)=0$ , d'où  $cste=0$ . On obtient finalement :

$$v_b = v_1 \tanh\left(\frac{t}{\tau_b}\right)$$

avec :

$$v_1 = \sqrt{\frac{8Rg(\rho_e - \rho_a)}{3C_x\rho_e}} = \sqrt{\frac{8 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^3}{3 \times 0,4 \times 10^3}} \sim \sqrt{7.10^{-2}} \sim 25 \text{ cm.s}^{-1}$$

et :

$$\tau_b = \frac{\rho_a v_1}{g(\rho_e - \rho_a)} = \frac{1,2 \times 0,25}{10 \times 10^3} = 30 \mu\text{s}$$

Ce sont des valeurs qui sont assez proches de celles attendues. Le modèle semble donc raisonnable.

21. Si l'écoulement est incompressible, cela signifie que  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ . Au vu des dépendances spatiales de  $\vec{v}$ , on obtient, d'après les données de fin d'énoncé :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) = 0$$

soit  $r^2 v = cste$ . Or en  $r=R$ , la vitesse est  $\frac{dR}{dt}$ , d'où :

$$\vec{v} = \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{dR}{dt} \vec{u}_r$$

22. Tout d'abord on peut calculer :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{2R}{r^2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{d^2 R}{dt^2}$$

et :

$$\frac{\partial v^2}{\partial r} = -4 \frac{R^4}{r^5} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2$$

soit :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial r} = \left( -4 \frac{R^4}{r^5} + \frac{2R}{r^2} \right) \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{R}{r^2} \left\{ \left( 2 - 4 \frac{R^3}{r^3} \right) \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + R \frac{d^2 R}{dt^2} \right\} = \frac{R}{r^2} \left\{ \left( 2 - 4 \frac{R^3}{r^3} \right) \left( \frac{dc}{dt} \right)^2 + R \frac{d^2 c}{dt^2} \right\}$$

Entre les accolades le premier terme est infiniment plus petit que le second, de sorte que dans l'équation de conservation de l'impulsion, on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial r} \sim -\rho_e \frac{R^2}{r^2} \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} \sim -\rho_e \frac{R_0^2}{r^2} \frac{d^2 \epsilon}{dt^2}$$

On obtient donc l'équation souhaitée en posant :

$$\beta = \rho_e R_0^2$$

Dans la mesure où  $\epsilon$  ne dépend que du temps, une intégration de cette équation différentielle par rapport à la variable  $r$  donne :

$$P = P_0 + \frac{\beta}{r} \frac{d^2 \epsilon}{dt^2}$$

puis en  $r = R$ , on obtient la pression  $P_a$ , telle que :

$$P_a = P_0 + \frac{\beta}{R} \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} \sim P_0 + \frac{\beta}{R_0} \frac{d^2 \epsilon}{dt^2}$$

**23.** Si l'évolution de la bulle est isentropique, on peut utiliser la loi de Laplace, qui s'écrit :

$$P_a V^\gamma = A$$

où  $P_a$  et  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  représente la pression à laquelle est soumise la bulle et  $V$  son volume. La constante  $A$  est obtenue en notant que pour  $P_a = P_0$ , on a  $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3$ . Finalement, on a :

$$P_a = P_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} = P_0 \left( \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{R_0}} \right)^{3\gamma} \sim P_0 \left( 1 - 3\gamma \frac{\epsilon}{R_0} \right)$$

**24.** On égalise les deux expressions de  $P_a$  pour obtenir :

$$\frac{d^2 \epsilon}{dt^2} + \frac{3\gamma P_0}{\beta} \epsilon = 0$$

C'est une équation harmonique associée à une fréquence d'oscillation :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\beta}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_e R_0^2}} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3 \times 1,4 \times 10^5}{10^3 \times 10^{-6}}} = \frac{2}{6} \cdot 10^4 \sim 3.10^3 \text{ Hz}$$

Le temps caractéristique de diffusion dans la bulle est donné par :

$$\tau = \frac{R_0^2}{D} = \frac{\rho_a c_a R_0^2}{\lambda_a} = \frac{1,2 \times 7,1.10^2 \times 10^{-6}}{2,5.10^{-2}} \sim 3.10^{-2} \text{ s}$$

Et la période d'oscillation vaut :

$$T = \frac{1}{f} \sim 3.10^{-4} \text{ s}$$

La période d'oscillation est donc plus petite d'un ordre de grandeur du temps caractéristique de diffusion. On peut donc supposer la durée d'une oscillation est un temps largement insuffisant pour que le transfert thermique puisse s'être fait. De ce point de vue il est raisonnable de supposer la transformation isentropique.

**25.**

On peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble du fluide sur la durée d'une oscillation  $T$ , on obtient alors :

$$\Delta E_c = NW = N f_{trainee} d$$

D'abord  $N$  est le nombre de bulles dans le spa. Puis chacune de ces bulles exerce une force de traînée :  $f_{trainee} = \rho_e \frac{4}{3}\pi R^3 g$  si on suppose que les bulles ont essentiellement un mouvement qui est celui du régime permanent : c'est bien raisonnable car la durée du régime transitoire est très courte (8  $\mu\text{s}$  d'après la question 20). Par ailleurs  $d = v_1 T$  représente la distance parcourue sur une période. Enfin  $\Delta E_c = N < e_c >$  si on suppose que c'est la vibration des bulles qui explique la force de traînée. On en déduit une expression de  $< e_c >$ , à savoir :

$$< e_c > = \frac{4\pi}{3} \rho_e g R^3 v_1 T$$

Reste l'application numérique :

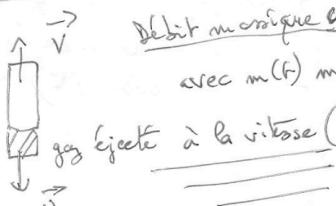
$$< e_c > = \frac{4 \times 3}{3} \times 10^3 \times 10 \times 10^{-9} \times 7.10^{-2} \times 3.10^{-4} \sim 9.10^{-15} \text{ J}$$

Une bulle met environ 3 s pour atteindre la surface du spa en oscillant 3000 fois chaque seconde donc elle cède sur toute son ascension environ  $9.10^{-15} \times 3.10^3 \times 3 = 10^{-10}$  J. C'est cette énergie qui semble être mise en jeu pour le brassage de l'eau par les bulles de spa.

## Troisième partie – Autour de la propulsion chimique - Mines Ponts PSI 2015

## Première partie - Aspects de la propulsion spatiale

I - Généralité - I) A) Aspect cinétique : loi de vitre



Debit massique est !  $Dm > 0$  avec  $Dm = -\frac{dm}{dt}$  ( $\frac{dm}{dt} < 0$ )  
avec  $m(t)$  masse de la fusée

gas éjecté à la vitesse ( $\vec{v} + \vec{u}$ ) dans le réf. terrestre !!

1- Qté de mat de la fusée à t :  $\vec{p_f}(t) = m(t) \vec{v}(t)$   
 à  $t+dt$  :  $\vec{p_f}(t+dt) = m(t+dt) \vec{v}(t+dt)$   
 Pqj  $m(t+dt) = m(t) - Dm dt$

Qté de mat du gaz éjecté  
 $\vec{p_g}(t+dt) = mg(t+dt) (\vec{v}(t+dt) + \vec{u})$

2- On applique le PFD à l'ensemble { fusée + gaz } qui forme un syst. fermé pour pouvoir appliquer les théorèmes généraux.

syst à t  $\rightarrow$  fusée  
 syst à  $t+dt$   $\rightarrow$  fusée + qté de gaz éjecté pdt dr  $\Rightarrow dm = Dm dt$

Bilan de quantité de mat :

$\vec{dp}_{\text{spatiale}} = \vec{p_f}(t+dt) - \vec{p_f}(t) + \vec{dp_g}$   
 avec  $\vec{dp_g} = Dm g (\vec{v} + \vec{u}) = Dm dt (\vec{v} + \vec{u})$   
 $\hookrightarrow$  qté de mat du gaz éjecté pdt dr

$d\vec{p_f} = \vec{p_f}(t+dt) - \vec{p_f}(t) = m(t+dt) \vec{v}(t+dt) - m(t) \vec{v}(t)$   
 $= d(m\vec{v}) = dm \vec{v} + m \vec{dv}$   
 avec  $dm = -Dm dt \rightarrow d\vec{p_f} = -Dm dt \vec{v} + m \vec{dv}$

donc  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p_f}}{dt} + \frac{d\vec{p_g}}{dt} = -Dm \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt} + Dm (\vec{v} + \vec{u})$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + Dm \vec{u}$$

Appliquons la PFD  $\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\Sigma} \text{ ext} = -mg \vec{u}_z$   
 (la masse du syst. est constante)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{u}_z - Dm \vec{u} \vec{u}_z = -mg \vec{u}_z$$

$$\hookrightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = Dm \vec{u} - mg$$

force de poussée  $F_p = Dm \vec{u}$

équivalente dont l'origine est la pte de mat emportée par le gaz.

3- La fusée décollera si la force de poussée est + importante que le poids :

$$Dm \vec{u} > mg$$

4- Impuls. spécifique de l'engol  $\rightarrow$  temps pour une masse m pour fournir une poussée équivalente au poids résistant par m

avec  $Dm = \frac{m}{\Delta t} \Rightarrow \frac{m}{\Delta t} \vec{u} = mg \rightarrow \Delta t = \boxed{I_s = \frac{u}{g}}$   
 Remarque !

5-  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dm}{dt} \vec{v} - mg$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -dm \vec{v} - mg dt$$

$$d\vec{v} = -\frac{dm}{m} \vec{v} - g dt$$

$$\int_{v(t=0)}^{v(t)} d\vec{v} = -\vec{v} \int_{m(t=0)}^{m(t)} \frac{dm}{m} - g \int_{t=0}^t dt$$

$\hookrightarrow$  masse initiale

$$v(t) - v(t=0) = -\vec{v} \ln \frac{m}{m_0} - g t$$

avec vitesse initiale nulle au décollage  
 $v(t=0) = 0$

$$v(t) = v_i \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - gt$$

6. Quand le vaisseau est éjecté de l'attracteur terrestre  
la masse  $m_f$  et vitesse  $v_f$

Alors la relation donnant  $v(t)$  pour la phase de nouvelle propuls' (sans prop.) :  $\Delta V = v_f - v_i = v \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right)$

7.  $m_{t_2} = 24$  tonnes avec  $m_2$ , engol = 20 tonnes

2 étages  $m_{t_1} = 110$  tonnes avec  $m_1$ , engol = 100 tonnes

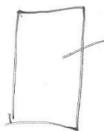
$$\Delta V_{2 \text{ étages}} = v \ln\left(\frac{m_{t_2} + m_{t_1}}{m_{t_2} + m_{t_1} - m_2 \text{ engol}}\right) \text{ sans éject de l'étage}$$

sans éject de l'étage  
le moins facile passe à  $m_{t_2}$   
(plus que le 2<sup>e</sup> étage)

$$+ v \ln\left(\frac{m_{t_2}}{m_{t_2} - m_2 \text{ engol}}\right) \text{ éject de l'étage}$$

$$\Delta V_{2 \text{ étages}} = v \ln \frac{134}{34} + v \ln \frac{24}{4} = 12,7 \text{ km.s}^{-1}$$

• pas d'1<sup>e</sup> étage



$$\Delta V_{\text{sans étage}} = v \ln \frac{134}{14} = 9,04 \text{ km.s}^{-1}$$

8. On considère une propuls' à 1 étage en l'absence d'attracteur terrestre  $\vec{g} = 0$ .

$$\Delta V = v \ln \left( \frac{m_0 + m_c}{m_0} \right) = v \ln \left( 1 + \frac{m_c}{m_0} \right)$$

$$1 + \frac{m_c}{m_0} = e^{\frac{v}{\Delta V}} \rightarrow M_c = m_0 \left( 1 - e^{-\frac{v}{\Delta V}} \right)$$

AN : Propuls' chimique  $v = 4,00 \text{ km.s}^{-1}$   $m_{c1} = 1,25 t$   
Propuls' ionique  $v = 20,0 \text{ km.s}^{-1}$   $m_{c2} = 162 \text{ kg}$

$$m_{c2} \approx \frac{m_{c1}}{10}$$

Le facteur exponentiel en  $e^{-\frac{\Delta V}{v}}$  augmente fortement l'efficacité de la propuls' ionique!

### I.-B - Aspect énergétique - rendement propulsif d'un moteur de fusée

9. de gaz éjecté par dr est animé d'une vitesse  $\vec{v} + \vec{v}_j = (v + u) \vec{v}_j$  de la ref. terrestre

$$dE_c = \frac{dm}{2} (v + u)^2 = \frac{dm}{2} dr (v + u)^2$$

$$P_{\text{jet}} = \frac{dE_c}{dr} = \frac{dm}{2} (v + u)^2$$

pouissance cinétique du jet

pouissance reçue par la partie de la force de

$$\text{poussée} \rightarrow P_{\text{poussée}} = \vec{v} \cdot \vec{F}_{\text{poussée}}$$

$$P_{\text{poussée}} = Dm UV \quad (> 0 \text{ puissance reçue})$$

$$10. \text{ Rendement} = \boxed{M} = \frac{\text{puissance gagnée}}{\text{puissance déperdue} \left( \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{puissance stockée} \end{array} \right)} = \frac{P_{\text{poussée}}}{P_{\text{jet}} + P_{\text{poussée}}} = \frac{P_{\text{poussée}}}{P_{\text{jet}} + P_{\text{poussée}}}$$

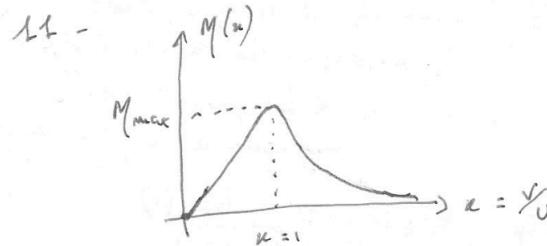
$$M = \frac{Dm UV}{Dm (UV + \frac{1}{2} (U - v)^2)} = \frac{2UV}{U^2 + V^2}$$

puissance stockée avec conversion parfaite

$$\boxed{M} = \frac{2UV}{V^2 (1 + (\frac{V}{U})^2)} = \frac{2 \frac{V}{U}}{1 + (\frac{V}{U})^2} = \frac{2x}{1 + x^2}$$

avec  $x = \frac{V}{U}$

Donc  $\Delta h + \Delta e + \Delta p = w' + q$     $\rightarrow$  1<sup>er</sup> principe  
en écoulement permanent



$$\frac{dM}{dx} = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \Leftrightarrow x =$$

Max. pour  $x = 1 \rightarrow \boxed{v = v}$

en effet pour  $v = v$   $P_{jet} = 0$   
de gaz éjecté n'en porte plus d'autre  
et puissance dissipée = puissance  
gagnée  $\rightarrow v$

$$(rg) M_{max} = \frac{2}{1+1} = 1 !$$

Plus Il faudrait adapter la vitesse d'éjection du gaz  
au cours du temps alors  $v \neq \text{cste}$  et  $v(t) = v(t)$  !

## II - Limites de la propulsion chimique

- 13 - . Transformat adiabatique  $q = 0$  sans travail contre que les forces de pression lors de l'éjection  $\rightarrow w' = 0$   
. écoulement à altitude ste  $\rightarrow \Delta p = 0$

$\hookrightarrow \boxed{\Delta h + \Delta e = 0}$

à premières approximations  $\Delta h = c_p \Delta T$   
pour le gaz parfait.

et  $\Delta T = T_{sortie} - T_c \approx -T_c$   
 $\hookrightarrow$  négligeable

et  $\Delta e = \frac{\gamma}{2} \Delta v^2$   
 $\Delta e = \frac{\gamma}{2} \frac{v^2}{2} (v_i = 0)$

$$-c_p T_c + \frac{v^2}{2} = 0 \rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{2 c_p T_c}}$$

avec  $c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M}$  (massique !!)

Donc  $\boxed{v_e = \sqrt{\frac{2 \gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M} T_c}}$

AN :  $M_{H_2O} = 0,018 \text{ kg.mol}^{-1}$  ( $2H_2 + O_2 \rightleftharpoons 2H_2O$  exothermique)  
 $\boxed{v_e = 3,11 \text{ km.s}^{-1}}$  et  $T_e = \frac{v}{g} = \frac{v_e}{g} = 317 \text{ s}$

Vitesse max  $< 4 \text{ km.s}^{-1}$   $\rightarrow$  propuls' chimique  
du I-A

✓ gaz éjecté,  
 $H_2O !!$