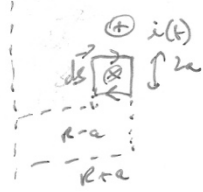


Ex1 - Pince ampérétrique

1. Vrai cours $\Rightarrow \vec{B}_{bobine} = \frac{\mu_0 N i(t)}{2\pi r}$ $\rightarrow$ à l'int pour $R-a < r < R+a$
2. à l'ext $\vec{B}_{bobine} = 0$
 $\Rightarrow \vec{B}_{fil} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}$

3. Inductance propre : $\phi = Li$
 $\phi = N \times \int_S \vec{B}_{bobine} \cdot d\vec{s}$ avec $d\vec{s} = ds \vec{e}_r = \ln a dr \vec{e}_r$
 N spires



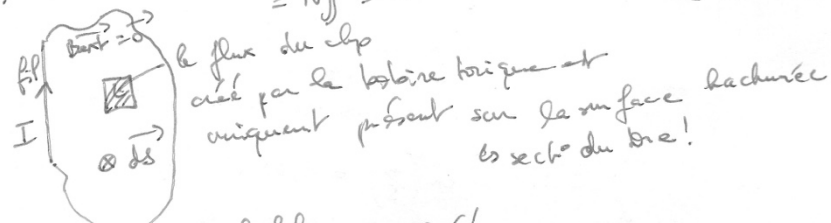
$$\phi = \cancel{L} a N \times \frac{\mu_0 N i(t)}{2\pi} \int_{R-a}^{R+a} \frac{dr}{r}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R-a} \right) i = L i$$

Inductance mutuelle

$\phi_{fil \rightarrow bobine} = \pi I = N \int \vec{B}_{fil} \cdot d\vec{s}$ avec $\hat{n} d\vec{s}$
 $= \frac{\mu_0 N a I}{\pi} \int_{R-a}^{R+a} \frac{dr}{r}$
 $= \frac{\mu_0 N a I}{\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R-a} \right) I$
 $\propto N$

4e) $\phi_{bobine \rightarrow fil} = \pi i$
 $= N \int \vec{B}_{bobine} \cdot d\vec{s} \rightarrow$ on retrouve le m résultat



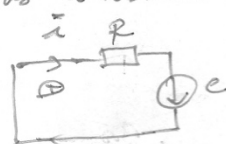
on refait le fil qui n'est pas en réalité!

4 - Par induct : la variation du flux magnétique produit temporelle par le fil à travers le tore donne naissance à une fem qui fait circuler le courant induit. On prendra aussi en compte le phénomène d'auto-induct de la bobine soit

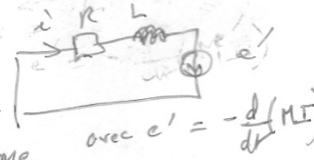
$$e = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (Li + MI)$$

avec $e = Ri$

qui équivaut au fait au schéma équivalent pour la bobine lorsque



on aura aussi pu donner le schéma suivant en dissociant flux propre $\rightarrow L$ et flux mutuel $\rightarrow M$



$$L \frac{di}{dt} + Ri + M \frac{dI}{dt} = 0$$

complexe

$$(j\omega L + R) i + j\omega M I = 0$$

5. $\left| \frac{i}{I} \right| = \frac{M\omega}{|R + j\omega L|}$ à hte fréq. $R + j\omega L \approx j\omega L$

$\left| \frac{i}{I} \right| \approx \frac{M}{L} = \frac{1}{N}$ Me fréq. $\rightarrow \omega L \gg R$
 $\omega \gg \frac{R}{L} \rightarrow \frac{1}{N} \gg \frac{R}{\omega L}$

le courant I se répartit sur N spires de courant $i \rightarrow$ transformateur de courant

$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^8 \cdot 10^{-2}}{\pi} \ln \left(\frac{7}{5} \right) = 1,35 \cdot 10^{-1} \text{ H}$
 $f_0 = \frac{2 \cdot 10^{-1}}{8,48 \cdot 10^{-2}} \approx \frac{1}{4} = 0,25 \text{ Hz} \ll 50 \text{ Hz!}$
 approx. valide

qui abaisse le courant utile pour les fortes intensités.

I) Interact entre deux spires

PT 2010 Léviton

- 1-1) TT plan contenant l'axe (Oz) est plan d'anti-sym de (S_0), $\vec{B} \in \Pi$ antisym et donc à leur intersection donc en un pt de l'axe $\vec{B}' = B \vec{u}_z$
- 1-2) La loi de Biot-Savart (hors-programme) $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{i d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$ permet de calculer $\vec{B}$ / $\vec{B} = \frac{\mu_0 a^2 i_0(r)}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$

$$\vec{B}(z=a) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi a} \cos \omega t \vec{u}_z = B_0 \cos \omega t \vec{u}_z$$

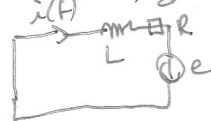
2) Déterminat du courant de la spire (S)

- 2-1) Le phénomène d'induction fait naître un courant induit dans la spire (S). En effet, celle-ci est traversée par un flux magnétique variable de le tps en présence de (S_0) (qui est parcourue par une intensité variable). Une fem et des courants induits apparaissent donc au sein de (S).

Chp uniforme au voisinage de l'axe $\Rightarrow \vec{B}$ sur (S)

$$\Phi = N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \pi b^2 B_0 \cos \omega t$$

$$\epsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = N \pi b^2 B_0 \omega \sin \omega t \quad (\text{couplage par inductance mutuelle})$$



$$\text{LDR} : L \frac{di}{dt} + Ri - \epsilon = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \pi \pi b^2 B_0 \omega \sin \omega t$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin \omega t$$

$$\text{En régime forcé} \Rightarrow (j\omega L + R)i_j = E_0$$

$$i_j = \frac{E_0}{R + j\omega L}$$

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\text{AN } I = 2.10^{-2} \text{ A}$$

$$\varphi = 86^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = + \arctan \left(\frac{\omega L}{R} \right)$$

3) Première déterminat de la force

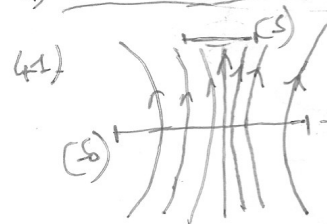
- 3-1) Force de Laplace subie par la spire parcourue par $i(t)$

- 3-2) et soumise au champ $\approx$ uniforme $\vec{B} = B_0 \cos \omega t \vec{u}_z$

$$d\vec{F}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B} \text{ avec } i \text{ et } \vec{B} \text{ uniforme sur le contour de la spire} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_L} = \oint (i d\vec{l}) \wedge \vec{B} = i \left(\oint d\vec{l} \right) \wedge \vec{B} = \boxed{0}$$

- 4a) Il faut prendre en cpte la variat de $\vec{B}$ au voisinage de l'axe et notamment sa composante radiale! comme nous allons le voir.

4) Améliorat du modèle



- 4-1) $\forall \text{ pt en dehors de l'axe}$
TT plan contenant Π et l'axe (Oz) est plan d'anti-sym de (S_0), $\vec{B} \in \Pi$ antisym. $\Rightarrow B_\theta = 0$!

- 4-3) On peut réaliser cette approx. à l'ordre 2 + hors car on demeure au voisinage de l'axe, ainsi B_z ne dpt que de z .

$$4-4) \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

P. Thomson

$$4-5) \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{SLAT} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{SLAT}$$

avec $\vec{B} = B_z(z) \vec{u}_z + B_r(r,z) \vec{u}_r$

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_1} -B_z(z) dS_1 = -B_z(z) \pi r^2$$

B_z uniforme

$$\int_{SLAT} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{SLAT} B_z(z+dz) \pi r^2 \text{ et } \int_{SLAT} B_r(r,z) dS_{LAT}$$

B_r uniforme (surface annulaire $2\pi r dz$)

$$[B_z(z+dz) - B_z(z)] \pi r^2 + B_r 2\pi r dz = 0$$

$$DL \Rightarrow \frac{dB_z}{dz} dz \Rightarrow \boxed{B_r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}}$$

$$4.6- B_z = \frac{\mu_0 a^2 i_0(t)}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad \frac{dB_z}{dz} = -\frac{3}{2} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \frac{\mu_0 a^2 i_0(t)}{2}$$

$$\frac{dB_z}{dz}(z=0) = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 a^3 i_0(t)}{(2a^2)^{5/2}} = -\frac{3}{8\sqrt{2}} \frac{\mu_0}{a^2} i_0(t)$$

$$B_r(r, a) = \frac{r}{a} \frac{3}{16\sqrt{2}} \frac{\mu_0}{a} i_0(t)$$

$$B_r(r, a) = \frac{r}{a} \frac{3}{4} \left(\frac{\mu_0 I_0}{4\sqrt{2}a} \right) \cos \omega t$$

$$\boxed{B_r(r, a) = \frac{r}{a} \frac{3}{4} B_0 \cos \omega t} \quad \boxed{B_1 = \frac{3}{4} B_0}$$

$B_r \uparrow$ qd $r \uparrow$ conforme avec l'allure des lignes de chp. qui se courbent qd $r \uparrow$! de + en +

$$4.7- d\vec{F}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

La composante B_z qui demeure uniforme sur le contour de (S) demeure tjrs nulle.

$$d\vec{F}_L = i d\vec{l} \wedge B_r(r) \vec{u}_r \quad \text{avec } d\vec{l} = b d\theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{F}_L = -i \frac{b^2}{a} 2\pi B_1 \cos \omega t \vec{u}_z$$

$$\text{et } \langle \sin(\omega t - \varphi) \cos \omega t \rangle = -\frac{1}{2} \sin \varphi$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\boxed{\langle \vec{F}_L \rangle = \pi N \frac{b^2}{a} I B_1 \sin \varphi \vec{u}_z} \rightarrow \text{pour } N \text{ spires!}$$

4.8) Si les effets réactifs masquent l'auto-induction la réaction au phénomène d'induct par l'intermédiaire de $\vec{F}_L \rightarrow \vec{0}$

en effet $R \gg L\omega$ alors $\varphi \rightarrow 0$ et $\sin \varphi \rightarrow 0$ (la spine chauffe)

$$4.9) \underline{AN} = \langle F_L \rangle = 6 \cdot 10^{-5} \text{ N} !$$

5) Autre point de vue

$$5.1) \vec{m} = i \vec{S} = \pi b^2 i(t) \vec{u}_z$$

$$5.2) \vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p = \vec{\text{grad}} (\vec{m} \cdot \vec{B}) = m \frac{dB}{dz} \vec{u}_z$$

$$\frac{dB}{dz}(z=a) = -\frac{3}{2} \frac{B_0}{a} \cos \omega t = -2 \frac{B_1}{a} \cos \omega t$$

$$\vec{F}_L = 2\pi \frac{b^2}{a} B_1 I \cos \omega t \sin(\omega t - \varphi) \vec{u}_z$$

$$\boxed{\langle \vec{F} \rangle = N \pi \frac{b^2}{a} I B_1 \sin \varphi \vec{u}_z} \rightarrow \text{pour } N \text{ spires}$$

$\vec{m} \text{ exprès! (très rapide)}$

$$5.3.) a) \vec{F} = \vec{0} \text{ à l'éq. } \langle F \rangle \vec{u}_z - mg \vec{u}_z = 0$$

$\hookrightarrow F(z_e) = mg$ $\rightarrow$ si matériau + léger, force d'éq. + faible comme $F(z)$ décroissante $\rightarrow z_e$ + élevée!

b) Stabilité de l'éq: soit une perturbation $\delta z > 0$ alors $F(z+\delta z) < F(z_e)$ $\overset{\text{alors}}{mg} > F(z+\delta z)$ la bobine est attirée vers l'éq. (inversement si $\delta z < 0$) la bobine est repoussée descend et

6) Champ total

$$6.1) \phi = Li \quad \text{avec } \phi = N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{et } \vec{B}_{\text{ave}} = \frac{N \mu_0 b^2}{2b^3} i \vec{u}_z = \frac{N \mu_0}{2b} i \vec{u}_z \text{ en } z=0$$

En approximant le chp sur (S) par le chp sur son axe en $r=0$
 et $\phi = \frac{N \mu_0}{2b} \pi b^2 i \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 \pi b N^2}{2}}$ alors B uniforme sur S

6.2) En négligeant R ici $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ or $I = \frac{E_0}{L\omega}$

$$i(t) = \frac{E_0}{L\omega} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = - \frac{\frac{N \pi b^2 B_0 \omega}{\mu_0 \pi b N^2}}{\frac{1}{\omega}} \cos \omega t$$

$$\boxed{i(t) = - \frac{2b B_0}{\mu_0 N} \cos \omega t} \rightarrow \text{le courant } i(t) \text{ est } \propto N \text{ par rapport à } B_0$$

6.3) En O, $\vec{B}(s) = \frac{-N \mu_0}{2b} \times \frac{2b B_0}{\mu_0 N} \cos \omega t \vec{u}_z$ (d'après 6.1)

$$\boxed{\vec{B}(s) = -B_0 \cos \omega t \vec{u}_z}$$

En O, $\boxed{\vec{B}(s_1) = \frac{\mu_0}{2a} B_0 \cos \omega t \vec{u}_z = \frac{2\sqrt{2} B_0 \cos \omega t \vec{u}_z}{2}}$

$$\vec{B}_{\text{total}} = (2\sqrt{2} - 1) B_0 \cos \omega t \vec{u}_z$$

En effet $\vec{B}(s_1)$ s'oppose à la cause qui lui a donné naissance (signe $\ominus$) conformément à la loi de Lenz.

II) Effets volumiques

1) Modèle sommaire

1-1). Si $h \ll a$ le chp extérieur créé par (S₀) est uniforme à l'échelle du cylindre, du point de vue de sa composante B_z .
 Si b faible soit $b \ll a$, le chp créé par (S₀) est proche de l'axe $\rightarrow$ sa composante $B_r \ll B_z$ peut être négligée.

Pour négliger le chp propre créé par les courants induits du cylindre il faudra $b \ll \delta$ épaisseur peau

1-2) Induct $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = + B_0 \omega \sin \omega t \vec{u}_z$

1-3) Les pls de symétrie de $\vec{E}$ sont celles d'un vecteur axial dont la source est une "distribut de champ" $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ analogue d'un courant porté par $\vec{u}_z$ (présent ds tout l'espace au signe $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$)
 Un plan contenant $\vec{u}_z$ et contenant l'axe (O_z) est un plan de sym. de cette distribut, et $\vec{E}$ est $\perp$ à π sym donc $\vec{E} = E(r, \theta, z, t) \vec{u}_\theta$.

A l'échelle du cylindre, selon sa hauteur, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ est uniforme donc invariance selon z , de même invariance selon θ ($\vec{B}$ indpt de θ)

$$\vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta = E(r, t) \vec{u}_\theta$$

L'expression du rot $\vec{E}$ confirme ces arguments de symétrie. En effet $\text{rot } \vec{E} \cdot \vec{u}_z = -\frac{\partial E}{\partial r} = 0$

$$\text{rot } \vec{E} \cdot \vec{u}_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE) = B_0 \omega \sin \omega t$$

$$rE = B_0 \omega \frac{r^2}{2} \sin \omega t + A \quad \text{avec } K = \frac{B_0 \omega}{2}$$

En $r=0 \rightarrow 0 = A$

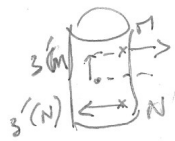
$$\boxed{\vec{E} = \frac{r}{2} B_0 \omega \sin \omega t \vec{u}_\theta = K r \sin \omega t \vec{u}_\theta}$$

1-4) Loi d'Ohm locale : $\vec{J} = \sigma \vec{E}$
 ↳ courants induits de Foucault

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \iint_V \vec{CP} \wedge \vec{J} dV$$

avec $\vec{CP} \wedge \vec{J} = (r \vec{u}_r + z' \vec{u}_z) \wedge j \vec{u}_\phi$ z' hauteur constante de la cylindre

$$= jr \vec{u}_z + jz' \vec{u}_r$$



Soit M et N deux points "symétriques" au centre du cylindre / $z'(M) = -z'(N)$ (avec $\vec{u}_r$ / $\vec{u}_\phi$ donc $\vec{u}_z$)
 Les composantes radiales de $d\vec{M}$ s'annulent !

2 à 2 $\Rightarrow$ résultante selon $\vec{u}_z$ uniquement !

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \left(\iint_V \sigma E(r) r d\tilde{v} \right) \vec{u}_z$$

avec $d\tilde{v} = r dr d\phi dz$ $dz = h$ r rayon cylindrique d'épaisseur dr

$$M = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^b \sigma E(r) r dr d\phi dz$$

$$\vec{M} = \pi h \sigma K \frac{R^4}{4} \sin \omega t \vec{u}_z$$

1-5) $\vec{F} \propto \sin \omega t$ car $\vec{u}_z$ donc $\langle \vec{F} \rangle = \vec{0}$!

Ici on n'a pas pris en compte le phénomène d'auto-induction !
 Donc $M = 0$! Ce qui revient à négliger le chp $\vec{B}$ propre créé par les courants de Foucault (non pris en compte ici).

1-6) MA de l'ARSS $\Rightarrow \text{rot } \vec{B}_i = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 de la conducteur

Symétrie de la distribut de courant $\rightarrow \vec{B}_i = B_i(r) \vec{u}_z$
 On peut utiliser le théorème d'Ampère (voir cours) ou l'express du rot $\vec{B}_i$ en proj. sur $\vec{u}_\phi$:

$$-\frac{dB_i}{dr} = \mu_0 \sigma K r \sin \omega t$$

$$\vec{B}_i = -\frac{\mu_0 \sigma K}{2} r^2 \sin \omega t + C$$

En $r=b$, $B_i(r=b)=0$ (comme pour le solénoïde à l'ext !)

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0 \sigma}{2} K (b^2 - r^2) \sin \omega t \vec{u}_z$$

1-7) en ODB $\left| \frac{B_i}{B} \right| = \frac{\frac{\mu_0 \sigma}{4} \sin \omega b^2}{B_0} = \frac{\mu_0 \sigma \omega b^2}{4} \ll 1$

↳ $b \ll \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$ $\rightarrow$ épaisseur de peau alors le chp induit est bien négligeable.

2) Amélioration du modèle : étude de l'effet de peau

2-1) $\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$
 MAIS mag.

MA $\Rightarrow \text{rot}(\mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$
 $= \mu_0 \text{rot}(\sigma \vec{E}) = \mu_0 \sigma (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$

donc $\Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

2-2) Les éq. de Maxwell prennent en cpte le phénomène d'induct car $\vec{B}$ est le chp total (propre + appliqué).

2-3) Avec $\vec{B} = B(r) e^{j\omega t} \vec{u}_z$

$$\Delta B(r) = \mu_0 \sigma j \omega B(r) = \frac{d^2 B}{dr^2}$$

2-4) Relat de parage : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J} \wedge \vec{m}_{12}$ (à $x=0$)
 avec $\vec{J}$ densité surf. de courant

En l'absence de courant surfacique $\rightarrow$ continuité du chp en $x=0 \Rightarrow \vec{B}(x=0^+) = \vec{B}_e$
 (✓t) ce qui justifie de choisir de $\vec{B}$ selon $\vec{u}_z$

$$2-8) \langle \vec{F}_L \rangle = \frac{S B_0^2}{4 \mu_0 S} \int_{x=0}^{x=h} e^{-2x/S} dx \vec{J}_x$$

$$\langle \vec{F}_L \rangle = \frac{S B_0^2}{2 \mu_0 S} \times \frac{S}{2} \vec{J}_x = \boxed{\frac{S B_0^2}{4 \mu_0} \vec{J}_x}$$

(Normal tension = densité d'énergie mag = $\frac{B^2}{2 \mu_0} = \frac{\langle F_L \rangle}{S}$)



$\vec{J}$ selon $\vec{J}_0$ pour respecter $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ avec $\vec{B}$ selon $\vec{J}_3$ (symétrie ou règle main droite)

Au voisinage du bord dans la géo. précédente

$$e^{-x/S} \approx 1 \quad \vec{J} \approx \frac{B_0}{\mu_0 S} \left(\cos(\omega t - \frac{x}{S}) - \sin(\omega t - \frac{x}{S}) \right)$$

$$\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4) = \sqrt{2} \left(\cos \omega t \cos \frac{\pi}{4} - \sin \omega t \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \cos \omega t - \sin \omega t$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{J} \approx \frac{\sqrt{2} B_0}{\mu_0 S} \cos(\omega t + \pi/4) \vec{J}_0}$$

Signe $\ominus$??

puisque $S \ll b$
applicable
(dens - espace ∞)

2-10) On suppose donc que $\vec{J}$ au voisinage du bord est identique en tout point du cylindre et que ces courants sont localisés sur une épaisseur radiale égale à $S/2$ (curieuse: bizarre que $\vec{J}$ "soit présente" radialement que selon $S/2$ alors que'il est présent sur h et la hauteur, mais bon....)

$$i = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} = \underbrace{J S}_{\text{uniforme}} = \frac{S}{2} h J = - \frac{B_0 \pi b^2}{\mu_0 2} \cos(\omega t + \pi/4)$$

$$\left(\vec{M} = i \vec{S} = - \frac{h \pi b^2}{\mu_0 2} B_0 \cos(\omega t + \pi/4) \vec{J}_3 \right)$$



2-11 - $\vec{F} = \mu \frac{dB}{dz} (z=0) \vec{J}$ avec $\frac{dB}{dz}$ uniforme sur le cylindre ($h \ll a, b$)

$$\sqrt{2} \langle \cos(\omega t + \pi/4) \cos \omega t \rangle = \langle (\cos \omega t - \sin \omega t) \cos \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \vec{F} \rangle = + \frac{h \pi b^2}{\mu_0 2} B_0 \times \frac{3}{4} \frac{B_0}{a} \times \frac{1}{2} \vec{J}_3$$

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{3 \pi}{8} \frac{h b^2}{a} \frac{B_0^2}{\mu_0} \vec{J}_3 = 5 \text{ N!}$$

Partie IV : Peut-on se passer de batterie ?

29. – La résistance R est liée à l'effet Joule qui se produit dans le conducteur du fait du déplacement des porteurs de charge.
- L'inductance propre L est liée à l'induction propre qui se produit à travers les spires de la bobine. En effet, la bobine, parcourue par un courant variable, crée un champ magnétique variable donc le flux à travers la bobine est variable.
- La capacité C est liée à l'existence d'"armatures" chargées se faisant face (les spires de la bobine), comme dans un condensateur.
30. En modélisation la bobine avec le modèle (b), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$(R_g + R + R_c)i + L \frac{di}{dt} = e(t)$$

En prenant $e(t) = E$ (pendant la demi-période où le signal créneau est positif), on a :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_{tot}}{L} i = \frac{E}{L} \quad \text{avec} \quad R_{tot} = R_g + R + R_c$$

On pose $\tau = \frac{L}{R_{tot}}$ et on obtient : $u_R(t) = R \left(A e^{-t/\tau} + \frac{E}{R_{tot}} \right)$

Or, $i(t = 0^-) = i(t = 0^+) = 0$ par continuité du courant dans la bobine (on pose $t = 0$ l'instant où la tension $e(t)$ passe de 0 à $+E$). Ainsi, on a :

$$u_R(t) = \frac{ER}{R_{tot}} (1 - e^{-t/\tau})$$

On est en présence d'un système d'ordre 1 avec le modèle (b).

Graphiquement, on remarque :

- une pente à l'origine non nulle ;
- l'absence de dépassement ;
- l'absence d'oscillations.

Ces différentes observations confirment que le système étudié est d'ordre 1. Le modèle (b) est donc cohérent avec la réponse observée.

Valeur de l'inductance L :

Afin de déterminer L , on détermine d'abord τ graphiquement. Pour cela, on trace la tangente à l'origine (l'origine étant l'instant où $e(t)$ passe de 0 à $+E$) et on mesure le temps t_{inter} pour lequel elle coupe l'asymptote $u_R = u_{R,\infty}$.

On a alors : $\tau = t_{inter} - t_{initial} = 7,6 \cdot 10^{-3}$ ms.

On trouve ensuite $L = \tau R_{tot}$ $L = 8,0$ mH. Cette valeur semble cohérente pour une bobine de ce type.

31. Le modèle (a) donne $|Z| = R$. Il reste valide tant que $|Z|$ est indépendant de la fréquence. On voit sur la figure 24 que $|Z|$ reste constante jusqu'à environ $f_{max,1} = 1.10^2$ Hz.

Le modèle (b) donne $|Z| = \sqrt{R^2 + (2\pi fL)^2}$ soit $\ln(|Z|) = \frac{1}{2} \ln(R^2 + (2\pi fL)^2)$.

Si on s'intéresse aux fréquences supérieures à 1 kHz, on a $R^2 \ll (2\pi fL)^2$ avec les valeurs de R et L dont on dispose. On pourra donc faire la simplification suivante :

$$\ln(|Z|) \simeq \frac{1}{2} \ln((2\pi fL)^2) \simeq \ln(2\pi L) + \ln(f)$$

On cherche donc jusqu'à quelle fréquence la courbe de la figure 24 est une droite de pente 1. On voit que ceci est vrai jusqu'à $f_{max,2} \simeq 5.10^4$ Hz.

$$32. \underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R + jL\omega} \text{ d'où}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

33. On lit graphiquement $f_0 \simeq 1,6 \cdot 10^5$ Hz. Pour une telle fréquence, on a bien $\underbrace{R}_{6,2\Omega} \ll \underbrace{2\pi fL}_{8.10^3\Omega}$.

On a alors $|\underline{Z}| = \frac{L\omega}{|1 - LC\omega^2|}$ qui atteint un maximum (infini!) lorsque le dénominateur s'annule. Ainsi,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ puis } C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L} \quad \text{A.N. : } C = 1,3 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 0,13 \text{ nF.}$$

Cette valeur est faible mais c'est logique car une bobine a un faible comportement capacitif.

34. Dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS), on néglige le temps de propagation du signal devant sa période soit $\tau_{propagation} \ll T$.

Cela revient à vérifier l'inégalité : $\ell \ll \lambda$ avec ℓ la distance caractéristique de propagation et λ la longueur d'onde du signal.

Ici, $\ell = r_0 \simeq 1$ à 10 m et $\lambda = \frac{c}{f} \simeq 3$ km. On a donc bien $r_0 \ll \lambda$ et on peut donc bien supposer que l'ARQS est vérifiée.

35. Norme du moment magnétique :

Par définition, on a $\mathcal{M}_1 = N_1 S_1 i_1$

Définition de l'inductance mutuelle :

Le flux, à travers le circuit 2, du champ magnétique créé par le circuit 1 s'écrit : $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$.

De même, $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$.

Expression de l'inductance mutuelle :

Calculons le flux de $\vec{B}_1$ à travers le circuit 2 :

$$\begin{aligned} \Phi_{1 \rightarrow 2} &= \iint_{N_2 \text{ spires}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \\ &= N_2 \vec{B}_1 \cdot S_2 \vec{u}_z \\ &= N_2 S_2 \frac{\mu_0 \mathcal{M}_1}{4\pi r_0^3} \left(2 \cos \theta_0 \underbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z}_{\cos \theta_0} + \sin \theta \underbrace{\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_z}_{-\sin \theta_0} \right) \\ &= \frac{N_2 S_2 \mu_0 N_1 S_1 i_1}{4\pi r_0^3} (2 \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0) \end{aligned}$$

Par identification, on trouve $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1 S_2}{4\pi r_0^3} (2 \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0)$

L'expression est homogène car μ_0 s'exprime en H.m^{-1} et M en H .

36. Le modèle du champ créé par un dipôle magnétique n'est valable que loin du dipôle, c'est-à-dire pour $r_0 \gg a_1$ où a_1 est le rayon de la spire constituant le dipôle magnétique. Ici, $a_1 = 10$ cm, donc l'expression du champ n'est pas valable pour des distances inférieures à 1 m. C'est bien ce qu'on observe sur la figure 26.

Pour l'application étudiée, on a $r_0 \sim 1$ à 10 m. Pour ces valeurs de r_0 , l'approximation dipolaire est valable. Le modèle analytique est donc pertinent dans ce cas (on voit sur la figure 26 qu'il est en bon accord avec l'expérience pour $r > 1$ m).

37. On écrit deux lois des mailles :

$$\begin{aligned} \underline{e} &= \left(R_1 + jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega} \right) \underline{i}_1 + jM\omega \underline{i}_2 \\ 0 &= \left(R_2 + R_c + jL_2\omega + \frac{1}{jC_2\omega} \right) \underline{i}_2 + jM\omega \underline{i}_1 \end{aligned}$$

38. Quand $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$, on a $\underline{i}_2 = \frac{Mj\omega_0 \underline{e}}{M^2\omega_0^2 + R_1(R_2 + R_c)}$

Puissance transmise à la charge :

$$P = R_c I_{eff}^2 = R_c \frac{(M\omega_0 E_{eff})^2}{(M^2\omega_0^2 + R_1(R_2 + R_c))^2}$$

39. On synthétise les résultats dans le tableau suivant :

r_0 (m)	1	3	10
P_{max} (W)	$1,3 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^1$	$2,5 \cdot 10^{-3}$

La puissance d'alimentation en vol stationnaire étant d'environ 50 W (d'après la formule trouvée à la question 7, pour une masse de 500 g), ce dispositif devrait se limiter à des vols à basse altitude (inférieure à 2 m), ce qui paraît inadapté à l'utilisation du drone. Ce système ne paraît donc pas pertinent pour alimenter un drone.