

**Partie I. Étude de l'oscillateur quasi-sinusoidal**

I.A.1) La dissipation d'énergie est due à la **résistance du câble** qui provoque un effet Joule.

I.A.2) Lorsque la fréquence augmente apparaît **l'effet de peau** qui diminue la section traversée par les lignes de courant. Cela **augmente la résistance**.

I.A.3) Le phénomène de mutuelle induction crée une f.e.m.  $e = -M \frac{di_C(t)}{dt}$  dans la boucle  $\mathcal{B}$ .

On a alors dans la boucle un courant d'intensité  $i_B(t) = \frac{e}{R_B}$  qui dissipe une puissance instantanée

$\mathcal{P}(t) = GR \cdot i_B^2 = \frac{e^2}{R_B}$ . Si  $i_C(t)$  est sinusoidal de la forme  $i_C(t) = I_0 \cos(2\pi f t)$ , on obtient

$e(t) = MI_0 2\pi f \sin((2\pi f t))$  et une puissance instantanée  $\mathcal{P}(t) = \frac{(2\pi f I_0 M)^2}{R_B} \sin^2(2\pi f t)$  dont la valeur

moyenne est  $\mathcal{P} = \frac{(2\pi f I_0 M)^2}{2R_B}$ . Cette puissance est proportionnelle à  $f^2$  et  $I_0^2$ . On peut dire que la résistance est **proportionnelle à  $f^2$** .

I.B.1) Les impédances d'entrée sont infinies donc  $V_- - V_S = RI$  et  $V_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_S$  d'après le théorème du diviseur de tension. On remarque que  $V = V_-$ .

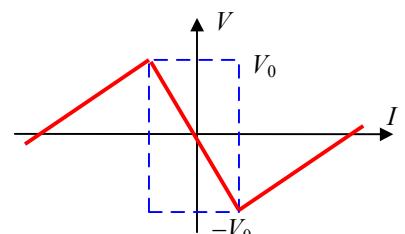
L'A.Op fonctionne en régime linéaire. Dans le modèle parfait, cela se traduit par  $V_+ = V_-$  soit ici  $V_S + RI = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_S$  d'où  $V_S = -R \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) I$  puis  $V = -R \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) I + RI$  soit  $V = -R \frac{R_1}{R_2} I$ .

I.B.2) Si l'A.Op fonctionne en saturation haute,  $V_S = +V_{SAT}$  donc  $V = V_{SAT} + RI$ . Si l'A.Op fonctionne en saturation basse,  $V_S = -V_{SAT}$  donc  $V = -V_{SAT} + RI$ .

I.B.3) Le fonctionnement linéaire n'est possible que si  $V_S \in [-V_{SAT}, V_{SAT}]$  ce qui se traduit par  $I \in \left[ -\frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \frac{V_{SAT}}{R}, \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \frac{V_{SAT}}{R} \right]$ . Le fonctionnement en saturation haute n'est possible que tant que  $V_+ > V$  soit  $\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{SAT} > V_{SAT} + RI$  ou encore

$I < -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{SAT}}{R}$ . On aura le fonctionnement en saturation basse pour

$I > \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{SAT}}{R}$ . On en déduit la caractéristique statique suivante :

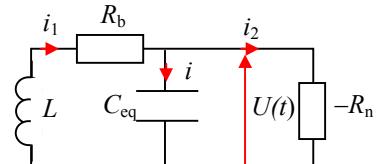


Le fonctionnement linéaire correspond à  $V \in [-V_0, V_0]$ , avec  $V_0 = -R \frac{R_1}{R_2} \left( -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{SAT}}{R} \right)$  soit  $V_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{SAT}$ . On peut alors écrire  $V = -R_n I$  en posant

$$R_n = \frac{R_1}{R_2} R.$$

I.C.1) Les deux condensateurs sont associés en parallèle. La capacité équivalente de l'association est  $C_{eq} = C_b + C_s$ .

I.C.2) Le schéma équivalent de l'oscillateur est le suivant :



Avec les orientations indiquées, on peut écrire :

$$U(t) = -R_n i_2(t) ; \quad U(t) = -R_b i_1(t) - L \frac{di_1(t)}{dt} \text{ et } i(t) = C_{\text{eq}} \frac{dU(t)}{dt}.$$

La loi des nœuds  $i_1 = i + i_2$

conduit ensuite à :

$$U(t) = -R_b \left( C_{\text{eq}} \frac{dU(t)}{dt} - \frac{U(t)}{R_n} \right) - L \frac{d}{dt} \left( C_{\text{eq}} \frac{dU(t)}{dt} - \frac{U(t)}{R_n} \right) = -R_b C_{\text{eq}} \frac{dU(t)}{dt} + \frac{R_b}{R_n} U(t) - L C_{\text{eq}} \frac{d^2 U(t)}{dt^2} + \frac{L}{R_n} \frac{dU(t)}{dt}$$

$$\text{soit } L C_{\text{eq}} \frac{d^2 U(t)}{dt^2} + \left( R_b C_{\text{eq}} - \frac{L}{R_n} \right) \frac{dU(t)}{dt} + \left( 1 - \frac{R_b}{R_n} \right) U(t) = 0 \text{ qui est bien de la forme demandée en}$$

$$\text{posant } a = L C_{\text{eq}}, \quad b = R_b C_{\text{eq}} - \frac{L}{R_n} \text{ et } c = \frac{R_b}{R_n}.$$

I.C.3) La solution peut être sinusoïdale si le coefficient du terme d'ordre un dans l'équation différentielle est nul soit  $b = 0$ . On en déduit  $R_n = \frac{L}{R_b C_{\text{eq}}}$  ou encore  $R_n = R_b Q^2$ .

I.C.4) Si la condition précédente est vérifiée, la solution de l'équation différentielle est sinusoïdale si le coefficient du terme d'ordre zéro est positif soit  $\frac{R_b}{R_n} < 1$  ou encore  $Q^2 > 1$ . On a donc  $Q_{\text{lim}} = 1$ .

I.C.5) Si cette condition est vérifiée, la fréquence des oscillations est alors  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1-c}{a}}$

$$\text{soit } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{Q^2}}{LC_{\text{eq}}}}.$$

I.C.6) En prenant  $f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC_{\text{eq}}}}$ , on commet une erreur relative  $\frac{\Delta f}{f} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}$  soit nu-

mériquement  $\frac{\Delta f}{f} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{64}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{64}}} = 8 \times 10^{-3}$  pour  $Q = 8$ , soit une erreur relative de 0,8%.

I.C.7) On a  $C_{\text{eq}} = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L}$  soit numériquement  $C_{\text{eq}} = \frac{1}{4\pi^2 (50 \times 10^3)^2 (150 \times 10^{-6})} = 68 \text{ nF}$ . Il faut donc choisir  $C_s = 58 \text{ nF}$ .

On trouve alors  $Q = \frac{1}{0,7} \sqrt{\frac{150 \times 10^{-6}}{68 \times 10^{-9}}} = 67$ . On a bien  $Q > Q_{\text{lim, recommandée}}$ .

I.C.8) On ne peut obtenir exactement  $b = 0$ . Pour que des pseudo oscillations s'amorcent sans s'amortir, il faut que le système soit instable, ce qui se traduit par trois coefficients de l'équation différentielle de signe contraire. Comme  $a > 0$  et  $1 - c > 0$ , il faut donc  $b < 0$  soit  $R_n < \frac{L}{R_b C_{\text{eq}}}$  ou encore  $R_n < Q^2 R_b$ .

I.C.9) Le fonctionnement étudié ci-dessus correspond au fonctionnement linéaire de l'A.Op. Il n'est donc possible que si  $V \in [-V_0, V_0]$ . Lorsque  $V$  atteint une des valeurs bornes de ce domaine, l'A.Op est saturé et l'analyse du système change. On montre que le fonctionnement en saturation n'est pas stable et l'A.Op revient en fonctionnement linéaire. Le régime établi de l'oscillateur est

donc une suite périodique de fonctionnements instables de l'A.Op, alternativement linéaires et saturés. L'amplitude maximale de ces oscillations est  $V_0$ .

## Partie II - Réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur

II.A.1-a) En négligeant le poids du porteur de charge, l'équation du mouvement est :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}_0 - h\vec{v}.$$

b) La solution de cette équation est de la forme  $\vec{v} = \frac{q}{h}\vec{E}_0 + \vec{a}e^{-\frac{t}{\tau_1}}$  en posant  $\tau_1 = \frac{m}{h}$ .

En régime établi,  $\vec{v} = \vec{v}_{\text{lim}}$  où  $\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{q}{h}\vec{E}_0$ . La densité de courant est alors  $\vec{J} = nq\vec{v}_{\text{lim}} = n\frac{q^2}{h}\vec{E}_0$ . On

reconnait la loi locale d'Ohm  $\vec{J} = \gamma_0\vec{E}_0$  en posant  $\gamma_0 = n\frac{q^2}{h}$ .

c) On ne calcule qu'un ordre de grandeur donc on ne précise pas la structure cristalline du matériau. La densité volumique des atomes est alors  $n_{\text{ATOME}} \approx \frac{\mu}{M} N_A$ . Comme il y a un électron libre par atome, on en déduit  $n \approx \frac{\mu}{M} N_A$ . A.N.  $n \approx \frac{8 \times 10^3}{(60 \times 10^{-3})} (6,0 \times 10^{23}) = 8 \times 10^{28} \text{ él.m}^{-3}$ .

On en déduit  $h = (8 \times 10^{28}) \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{10^7} = 2 \times 10^{-16} \text{ kg.s}^{-1}$  puis  $\tau_1 = \frac{9,1 \times 10^{-31}}{2 \times 10^{-16}} = 4 \times 10^{-15} \text{ s}$ .

II.A.2-a) Le champ électrique varie sinusoïdalement dans le temps donc il s'établit un régime sinusoïdal pour  $\vec{v}$ . On utilise la représentation complexe  $\underline{\vec{v}}(t) = \underline{\vec{V}}e^{j\omega t}$ . En reportant dans l'équation différentielle, on obtient  $m j \omega \underline{\vec{V}} + h \underline{\vec{V}} = q \vec{E}_0$  soit  $\underline{\vec{V}} = \frac{q}{h + j m \omega} \vec{E}_0 = \frac{1}{(1 + j \omega \tau_1)} \frac{q \tau_1}{m} \vec{E}_0$ .

La densité de courant a alors pour amplitude complexe  $\underline{J} = nq \frac{1}{(1 + j \omega \tau_1)} \frac{q \tau_1}{m} \vec{E}_0$ . On reconnaît  $\gamma_0 = n \frac{q^2}{h} = n \frac{q^2}{m} \tau_1$  donc  $\underline{J} = \frac{\gamma_0}{(1 + j \omega \tau_1)} \vec{E}_0$ . On retrouve la loi locale d'Ohm en posant

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{(1 + j \omega \tau_1)}.$$

b) Avec la valeur numérique de  $\tau_1$ , on obtient  $\omega \tau_1 = 1$  pour  $\omega = \frac{1}{4 \times 10^{-15}} = 2 \times 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$  soit  $f = 3,6 \times 10^{13} \text{ Hz}$ . Pour des fréquences inférieures à  $100 \text{ GHz} = 10^{11} \text{ Hz}$ , on a donc  $\omega \tau_1 < 0,01$  et  $\underline{\gamma} \approx \gamma_0$ .

II.A.3) La densité volumique de courant de déplacement est  $\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Pour un champ variant sinusoïdalement, on obtient  $\underline{\vec{J}}_D = \epsilon_0 j \omega \vec{E}_0$  et  $\frac{\|\underline{\vec{J}}_D\|}{\|\underline{\vec{J}}\|} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma_0}$ . On a donc  $\frac{\|\underline{\vec{J}}_D\|}{\|\underline{\vec{J}}\|} \ll 1$  si  $\omega \ll \frac{\gamma_0}{\epsilon_0}$  soit numériquement  $f \ll \frac{10^7}{2\pi(8,85 \times 10^{-12})} = 2 \times 10^{17} \text{ Hz}$ . Cette valeur dépasse la limite établie à la question précédente pour la validité de la loi d'Ohm. On doit donc limiter la validité de cette approximation à la même valeur de  $100 \text{ GHz}$ .

II.B.1-a) La direction de polarisation est la direction du champ électrique soit  $\vec{e}_x$  d'après l'expression donnée par l'énoncé.

b) D'après l'expression de la phase  $\phi(z, t) = \omega t - \underline{k}z + \phi_E$ , la direction de propagation est  $\vec{e}_Z$ .

II.B.2-a) Avec les approximations des questions II.A.2 et II.A.3, les équations de Maxwell-

Faraday et Maxwell-Ampère s'écrivent 
$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 \sigma_0 \vec{E} \end{cases}.$$

On en déduit  $\vec{\text{rot}} \left( \vec{\text{rot}} \vec{E} \right) = -\vec{\text{rot}} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{B} = -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Or  $\vec{\text{rot}} \left( \vec{\text{rot}} \vec{E} \right) = \vec{\text{grad}} \left( \text{div}(\vec{E}) \right) - \Delta \vec{E}$ . Comme  $\text{div}(\vec{E}) = 0$  d'après l'équation de Maxwell-Gauss puisque la charge volumique est nulle dans le conducteur, il reste  $\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

On obtient une équation du type « **équation de diffusion** ».

b) En représentation complexe, l'équation précédente devient  $-\underline{k}^2 \underline{E} = \mu_0 \sigma_0 \omega \underline{E}$  d'où la relation de dispersion  $\underline{k}^2 = -j\mu_0 \sigma_0 \omega$ .

II.B.3-a) On a posé  $\underline{k} = k' + jk''$ . Alors  $\underline{k}^2 = k'^2 - k''^2 + 2jk'k''$ . En reportant dans la relation de dispersion, on obtient  $k'^2 = k''^2$  et  $2jk'k'' = -\mu_0 \sigma_0 \omega$ . Comme l'onde se propage vers les  $z$  croissants, on choisit  $k' > 0$  soit  $k' = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}}$  et  $k'' = -k'$ . En notant  $\delta = -\frac{1}{k''}$ , on obtient

$$\underline{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - k'z - j\frac{1}{\delta}z + \phi_E)} = \vec{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - k'z + \phi_E)} \text{ soit, en grandeur réelle,}$$

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - k'z + \phi_E).$$

b)  $\delta$  est la distance caractéristique d'atténuation du champ électrique. On l'appelle « **épaisseur de peau** ». D'après la question précédente, on a  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$ .

$$c) \delta = \sqrt{\frac{2}{(4\pi \times 10^{-7})(10^7)2\pi(50 \times 10^3)}} = 0,7 \text{ mm à 50 kHz}$$

$$\text{et } \delta = \sqrt{\frac{2}{(4\pi \times 10^{-7})(10^7)2\pi(10 \times 10^9)}} = 1,6 \text{ μm à 10 GHz.}$$

On peut donc négliger l'effet de peau à 50 kHz pour des fils de diamètre de l'ordre du millimètre comme c'est le cas de la boucle. Par contre, une onde créée par un radar ne pénètre pratiquement pas.

d) Par définition, la vitesse de phase de l'onde dans le conducteur est  $v_\phi = \frac{\omega}{k'}$ .

Comme on a vu que  $\delta = \frac{1}{k'}$ , on peut écrire  $v_\phi = \delta \omega$ . Avec l'expression de  $\delta$ , on obtient

$$v_\phi = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \sigma_0}} : \text{ la vitesse de phase dépend de } \omega \text{ donc le milieu est dispersif.}$$

e) Le champ électrique de l'onde crée une densité de courant dans le conducteur d'après la loi locale d'Ohm. Ce courant dissipe de l'énergie par effet Joule ce qui diminue l'énergie du champ, ce qui se traduit par une atténuation de l'amplitude.

II.B.4) L'équation de Maxwell-Faraday  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  peut s'écrire en représentation complexe  $-j\vec{k} \wedge \vec{E}(z, t) = -j\omega \vec{B}(z, t)$  d'où  $\vec{B}(z, t) = \frac{k}{\omega} \vec{e}_z \wedge E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - k'z + \phi_E)} \vec{e}_x = \frac{|k| e^{j\phi_k}}{\omega} E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - k'z + \phi_E)} \vec{e}_y$ .

On peut donc écrire  $\vec{B}(z, t) = \vec{B}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - k'z + \phi_B)}$  où  $\vec{B}_0 = \frac{|k|}{\omega} E_0 \vec{e}_y = \frac{\sqrt{k'^2 + k''^2}}{\omega} E_0 \vec{e}_y$  soit  $\vec{B}_0 = \frac{\sqrt{2}}{\omega \delta} E_0 \vec{e}_y$  car  $k'^2 = k''^2 = \frac{1}{\delta^2}$ .

Par ailleurs,  $\phi_B = \phi_E + \phi_k$  donc  $\phi = \phi_E - \phi_B = -\phi_k = -\arctan\left(\frac{k''}{k'}\right)$ . Comme  $k'' = -k'$ , on a

$$\phi = \frac{\pi}{4}.$$

II.C.1-a) Le vecteur  $\vec{e}_y$  est dans le plan de l'interface air-conducteur donc le champ magnétique dans l'air, porté par  $\vec{e}_y$ , est tangent à cette interface.

En l'absence de courant surfacique dans le plan de l'interface, il y a continuité de la composante tangentielle de  $\vec{B}$  donc, en  $z = 0$ , on a  $\vec{B}_{\text{COND}}(0, t) = \vec{B}_{\text{air}}(0, t)$ .

Avec les expressions données pour le champ dans le conducteur et dans l'air, cette condition se traduit par  $\vec{B}_0 \cos(\omega t + \phi_B) = \vec{B}_{\text{air}, 0} \cos(\omega t)$ .

On en déduit  $\vec{B}_0 = \vec{B}_{\text{air}, 0}$  et  $\phi_B = 0$ . On a donc  $\vec{B}_{\text{COND}}(z, t) = B_{\text{air}, 0} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - k'z) \vec{e}_y$ .

b) La question II.B a montré que dans le conducteur, les vecteurs  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  forment un trièdre direct, avec  $E_0 = \frac{\omega \delta}{\sqrt{2}} B_0$  et  $\phi_E = \frac{\pi}{4} + \phi_B$  (où  $\phi_B = 0$ ). On en déduit

$$\vec{E}_{\text{COND}}(z, t) = \frac{\omega \delta}{\sqrt{2}} B_{\text{air}, 0} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - k'z + \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_x.$$

c)  $\vec{J}$  est une densité de courant par unité de surface donc et homogène à  $[I][L]^{-2}$ . Son unité est donc  $\text{A.m}^{-2}$ .

D'après la loi locale d'Ohm conduit à  $\vec{J}(z, t) = \gamma_0 \frac{\omega \delta}{\sqrt{2}} B_{\text{air}, 0} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - k'z + \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_x$ .

II.C.2-a) Un conducteur parfait est défini par une **conductivité infinie**.

b) L'expression  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$  montre que  $\delta = 0$  dans le modèle parfait. Il n'y a donc pas de champ (magnétique ou électrique) ni de densité de courant dans le conducteur. La distribution de courant est modélisée par une densité surfacique circulant sur l'interface air-conducteur.

c) L'intensité à travers une ligne tracée sur l'interface est  $i(t) = \int_A^B \vec{J}_s(t) \cdot \vec{n}_\Sigma d\ell$  donc l'unité de  $J_s$  est  $\text{A.m}^{-1}$ .

Considérons l'intensité qui traverse une surface perpendiculaire à  $\vec{e}_x$ , de longueur infinie le long de  $\vec{e}_z$  et de longueur  $L$  sur  $\vec{e}_y$  dans le modèle réel. On a  $i(t) = \iint \vec{J}(z, t) \cdot \vec{n}_\Sigma dS = \gamma_0 \frac{\omega \delta}{\sqrt{2}} B_{\text{air}, 0} \int_0^L dy \int_0^\infty e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - k'z + \frac{\pi}{4}\right) dz \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x$ .

Comme  $k' = \frac{1}{\delta}$ , on peut écrire  $i(t) = \gamma_0 \frac{\omega \delta}{\sqrt{2}} B_{\text{air}, 0} L \int_0^\infty e^{-\frac{z}{\delta}} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) dz = \gamma_0 \frac{\omega \delta}{2} B_{\text{air}, 0} L \left[ -\delta e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right]_0^\infty$  d'après l'indication de l'énoncé.

Comme  $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \delta e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) = 0$ , il reste  $i(t) = \gamma_0 \frac{\omega}{2} B_{\text{air}, 0} L \delta^2 \cos(\omega t) = \gamma_0 \frac{\omega}{2} B_{\text{air}, 0} L \frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega} \cos(\omega t)$

À travers une ligne de longueur  $L$  le long de  $\vec{e}_Y$ , on obtient  $i(t) = \int_0^L \vec{J}_S(t) \cdot \vec{e}_X dy = J_S(t)L$ .

En identifiant les deux expressions, il reste  $J_S(t) = \frac{B_{\text{air},0}}{\mu_0} \cos(\omega t)$ .

On sait que  $\vec{B}_{\text{air}}(t) = B_{\text{air},0} \cos(\omega t) \vec{e}_Y$  et  $\vec{J}_S(t) = J_S(t) \vec{e}_X$  donc on peut écrire  $\vec{J}_S(t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{\text{air}}(t) \wedge \vec{e}_Z$ . Comme  $\vec{B}$  est nul dans le conducteur, la condition de continuité de la composante tangentielle de  $\vec{B}$  est bien vérifiée.

### Partie III Modification de l'inductance de la boucle enterrée

III.A.1)  $\vec{J}_1$  étant uniforme, on a  $I = J_1 \cdot \pi \varepsilon^2$  d'où  $\vec{J}_1 = \frac{I}{\pi \varepsilon^2} \vec{u}_z$ .

III.A.2) La distribution de courant est invariante par symétrie par rapport au plan contenant l'axe  $Oz$  et le point  $M$ . Le champ en  $M$  est donc perpendiculaire à ce plan. Dans la base cylindrique indiquée, on peut donc écrire  $\vec{B}_1(M) = B_1(r, \theta, z) \vec{u}_\theta(M)$ .

La distribution est invariante par rotation d'un angle quelconque autour de  $Oz$  donc  $B_1$  ne dépend pas de  $\theta$ .

Le fil est modélisé comme de longueur infinie donc la distribution est invariante par translation le long de  $Oz$  :  $B_1$  ne dépend pas de  $z$ .

Il reste  $\vec{B}_1(M) = B_1(r) \vec{u}_\theta(M)$ .

III.A.3) D'après ce qui précède, les lignes de champ sont des cercles centrés sur  $Oz$ . On applique le théorème d'Ampère sur le cercle ( $\Gamma$ ) de rayon  $r$ , centré sur l'axe  $Oz$  et orienté par  $\vec{u}_\theta(M)$ .

On a donc  $C_\Gamma(\vec{B}) = \oint_\Gamma \vec{B}_1(M) \cdot \vec{u}_\theta(M) d\ell = B_1(r) \cdot 2\pi r$ . Le théorème d'Ampère s'écrit  $C_\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 I_\Gamma$ .

Si  $r > \varepsilon$ , on a  $I_\Gamma = I$  d'où  $B_1(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  puis  $\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta(M)$ .

III.A.4) Si  $r < \varepsilon$ , on a  $I_\Gamma = J_1 \pi r^2$  d'où  $B_1(r) = \frac{\mu_0 J_1 \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi \varepsilon^2}$  puis  $\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \varepsilon^2} r \vec{u}_\theta(M)$ .

III.A.5) La courbe  $\|\vec{B}_1(M)\| = f(r)$  est la suivante :

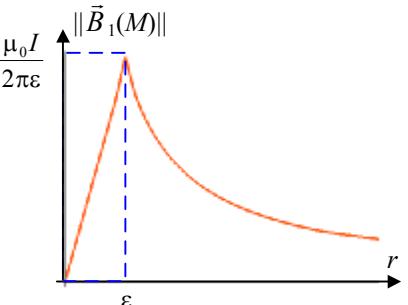
III.B.1) L'énergie magnétique est  $E_m = \frac{1}{2} L I^2$ .

III.B.2) Le champ magnétique est constant donc il n'y a pas de champ électrique et la densité volumique d'énergie magnétique se réduit à  $e_m(M) = \frac{\|\vec{B}(M)\|^2}{2\mu_0}$ .

L'énergie totale est alors  $E_m = \iiint_{\text{ESPACE}} \frac{\|\vec{B}(M)\|^2}{2\mu_0} d\tau$ .

N.B. Comme les fils sont modélisés comme infinis, cette énergie est infinie. En fait, il faut calculer l'énergie contenue dans une tranche de longueur  $\ell$  du circuit.

III.B.3) Pour une longueur  $dz$  de circuit, on peut écrire  $dE_m = \frac{1}{2} L_{\text{lin}} dz I^2$  d'une part et  $dE_m = \frac{dE_m}{dz} dz$ . En identifiant les deux expressions, on obtient  $L_{\text{lin}} = 2 \frac{dE_m}{dz} \frac{1}{I^2}$  d'où



$$L_{\text{lin}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( 1 + 4 \ln \left( \frac{\alpha}{\varepsilon} \right) \right).$$

III.C.1) On utilise le principe de superposition donc le champ magnétique (puis le flux, puis l'inductance propre) est la somme des champs (flux et inductance) des deux paires de fils parallèles séparés respectivement de  $a$  et de  $b$ . On obtient  $L_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( 1 + 4 \ln \left( \frac{b}{\varepsilon} \right) \right) a + \frac{\mu_0}{4\pi} \left( 1 + 4 \ln \left( \frac{a}{\varepsilon} \right) \right) b$ .

Comme  $b \gg a$ , on peut faire l'approximation  $L_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( 1 + 4 \ln \left( \frac{a}{\varepsilon} \right) \right) b$ .

Pour  $N$  spires, on a  $\vec{B} = N\vec{B}_1$  et  $\Phi = N\Phi_{\text{SPIRE}}(\vec{B}) = N^2\Phi(\vec{B}_1)$  donc  $L = N^2 L_1$ .

$$\text{III.C.3) A.N. } L_1 = 5^2 \frac{4\pi \times 10^{-7}}{4\pi} \left( 1 + 4 \ln \left( \frac{0,5}{10^{-3}} \right) \right) 2 = 125 \text{ } \mu\text{H}.$$

Cette valeur d'inductance est relativement faible mais comme il n'y a pas de noyau ferromagnétique pour augmenter le flux, elle paraît vraisemblable.

III.D.1-a) La composante normale du champ magnétique est conservée à la traversée de l'interface air-conducteur. Comme le conducteur est parfait, le champ magnétique est nul dans le conducteur. On en déduit que la composante normale du champ magnétique extérieur est nulle. Le champ magnétique extérieur est donc **tangent à l'interface**.

b) Puisque  $\vec{B}(y=0^+) = \vec{0}$  dans le conducteur, la relation de passage pour la composante tangentielle s'écrit  $\vec{B}(y=0^-) = \mu_0 \vec{J}_S \wedge (-\vec{u}_Y)$  soit  $\vec{B}(y=0^-) = \mu_0 \vec{u}_Y \wedge \vec{J}_S$ .

Dans la partie II.C.2-c), on a montré que  $\vec{J}_S(t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{\text{air}}(t) \wedge \vec{e}_Z$ . Avec les notations de cette partie,  $\vec{e}_Z = \vec{u}_Y$  et  $\vec{B}_{\text{air}}(t) = \vec{B}(y=0^-)$  donc les vecteurs  $\vec{B}(y=0^-)$ ,  $\vec{u}_Y$  et  $\vec{J}_S(t)$  forment un trièdre direct avec  $\|\vec{B}(y=0^-)\| = \mu_0 \|J_S\|$ . Ce qui correspond bien à la relation établie ci-dessus.

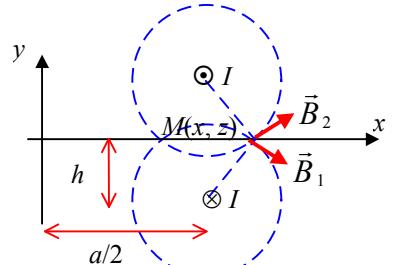
c) Dans le problème *C*, la distribution de courant est invariante par symétrie par rapport au plan  $(O, x, z)$  donc le champ magnétique en un point de ce plan est perpendiculaire à ce plan : cela ne correspond pas au problème *A*.

Dans le problème *D*, la distribution de courant est invariante par antisymétrie par rapport au plan  $(O, x, z)$  donc le champ magnétique en un point de ce plan est contenu dans ce plan : cela correspond au problème *A*.

d) La résultante des champs  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  crée par les deux fils d'abscisse  $\frac{a}{2}$  est portée par  $\vec{u}_X$  donc  $B(M) = 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_0(M) \cdot \vec{u}_X$ , avec  $r = \sqrt{h^2 + \left( x - \frac{a}{2} \right)^2}$  et  $\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_X = -\frac{h}{\sqrt{h^2 + \left( x - \frac{a}{2} \right)^2}}$  donc  $\vec{B}(M) = 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{h}{h^2 + \left( x - \frac{a}{2} \right)^2} \vec{u}_X$ .

Le champ crée par les deux fils d'abscisse  $-\frac{a}{2}$  s'obtient en remplaçant  $a$  par  $-a$  et  $I$  par  $-I$  dans l'expression précédente. Le champ résultant est donc

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left( \frac{h}{h^2 + \left( x - \frac{a}{2} \right)^2} - \frac{h}{h^2 + \left( x + \frac{a}{2} \right)^2} \right) \vec{u}_X.$$



Avec la relation de passage, on obtient  $\vec{J}_s(t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(M) \wedge \vec{u}_Y$  soit

$$\vec{J}_s(M) = \frac{Ih}{\pi} \left( \frac{1}{h^2 + \left( x - \frac{a}{2} \right)^2} - \frac{1}{h^2 + \left( x + \frac{a}{2} \right)^2} \right) \vec{u}_Z.$$

III.D.2-a) La densité volumique de puissance dissipée par effet Joule s'écrit  $p = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{\vec{J}^2}{\gamma_0}$

d'après la loi locale d'Ohm. Comme  $\vec{J} = \frac{\vec{J}_s}{\delta}$  dans le modèle décrit, la puissance dissipée dans la tranche de conducteur d'épaisseur  $\ell$  le long de  $\vec{u}_Z$ , infinie le long de  $\vec{u}_X$  et  $\delta$  le long de  $\vec{u}_Y$  est  $P = \int_0^\delta dy \int_0^L dz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_s^2(x)}{\delta^2 \gamma_0} dx = \delta \ell \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_s^2(x)}{\delta^2 \gamma_0} dx$  soit par unité de longueur selon  $\vec{u}_Z$ ,  $P_{\text{lin}} = \frac{1}{\delta \gamma_0} \int_{-\infty}^{+\infty} J_s^2(x) dx$ .

b) Avec l'expression de  $J_s$ , on obtient

$$P_{\text{lin}} = \frac{1}{\delta \gamma_0} \left( \frac{Ih}{\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{h^2 + \left( x - \frac{a}{2} \right)^2} - \frac{1}{h^2 + \left( x + \frac{a}{2} \right)^2} \right)^2 dx.$$

On peut écrire  $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{h^2 + \left( x - \frac{a}{2} \right)^2} - \frac{1}{h^2 + \left( x + \frac{a}{2} \right)^2} \right)^2 dx = \frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{x - a}{2h} \right)^2} - \frac{1}{1 + \left( \frac{x + a}{2h} \right)^2} \right)^2 dx$ . En posant

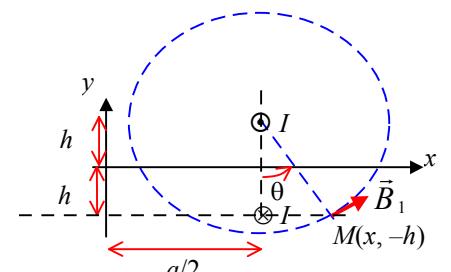
$k = \frac{a}{2h}$  et  $u = \frac{x}{h}$  soit  $dx = h du$ , il vient  $H = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{1 + (u - k)^2} - \frac{1}{1 + (u + k)^2} \right)^2 du = \frac{1}{h} \frac{\pi}{1 + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{h} \frac{\pi}{1 + \left( \frac{2h}{a} \right)^2}$ . On obtient donc  $P_{\text{lin}} = \frac{1}{\delta \gamma_0} \left( \frac{Ih}{\pi} \right)^2 \frac{1}{h} \frac{\pi}{1 + \left( \frac{2h}{a} \right)^2}$ . Pour une longueur  $b$  de conducteur, on obtient  $P_{\text{veh}} = \frac{1}{\pi \delta \gamma_0} \frac{hb}{1 + \left( \frac{2h}{a} \right)^2} I^2$  qui est bien de la forme  $P_{\text{veh}} = R_{\text{veh}} I^2$  en posant

$$R_{\text{veh}} = \frac{1}{\pi \delta \gamma_0} \frac{hb}{1 + \left( \frac{2h}{a} \right)^2}.$$

c)  $R_{\text{veh}} = \frac{1}{\pi (10^{-3}) (10^7)} \frac{(0,2)2}{1 + \left( \frac{2(0,2)}{0,5} \right)^2} = 7,8 \times 10^{-6} \Omega$ .

La boucle se comporte comme un fil de longueur  $2b$  (en négligeant  $a$  devant  $b$ ) donc sa résistance est  $R = \frac{1}{\gamma_{\text{Cu}}} \frac{2b}{\pi \epsilon^2}$ . A.N.  $R = \frac{1}{(6 \times 10^7)} \frac{2(2)}{\pi (10^{-3})^2} = 2 \times 10^{-2} \Omega$ . La résistance du véhicule est négligeable devant celle de la boucle.

III.D.3-a) Dans le modèle magnétostatique équivalent, la distribution de courant sur le véhicule est représentée par les deux fils de cote  $+h$ .



En un point  $M$  de coordonnées  $(x, -h)$ , la composante sur  $\vec{u}_Y$  du champ  $\vec{B}_1$  est  $B_{1Y}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_0(M) \cdot \vec{u}_Y$  avec  $r = \sqrt{(2h)^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}$  et  $\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_Y = \cos(\theta) = \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)}{\sqrt{(2h)^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}$ .

On a donc  $B_{1Y}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)}{4h^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}$ .

La composante du champ crée par le fil d'abscisse  $-\frac{a}{2}$  s'obtient en remplaçant  $a$  par  $-a$  et  $I$  par  $-I$  dans l'expression précédente. La composante du champ résultant est donc

$$B_Y(x, -h) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)}{4h^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} - \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)}{4h^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} \right].$$

b) Le flux à travers une surface de côté  $\ell$  sur  $Oz$  et  $a$  sur  $Ox$  orientée par  $\vec{u}_Y$  est

$$\Phi = \int_0^L dz \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \vec{B}(M) \cdot \vec{u}_Y dy = \ell \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[ \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)}{4h^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} - \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)}{4h^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} \right] dx.$$

Notons  $H = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[ \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)}{4h^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} \right] dx = \frac{1}{2h} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[ \frac{\left(\frac{x}{2h} - \frac{a}{4h}\right)}{1 + \left(\frac{x}{2h} - \frac{a}{4h}\right)^2} \right] dx$  et posons  $u = \frac{x}{2h} - \frac{a}{4h}$  tel que

$$dx = 2hdu. Il vient H = \frac{1}{2h} \int_{-\frac{a}{2h}}^{\frac{a}{2h}} \left[ \frac{u}{1+u^2} \right] 2hdu = \left[ \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C \right]_{-\frac{a}{2h}}^{\frac{a}{2h}} = -\frac{1}{2} \ln \left( 1 + \left( \frac{a}{2h} \right)^2 \right).$$

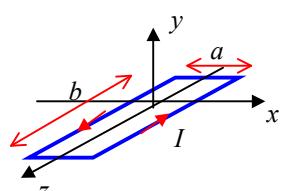
On obtient la valeur de  $H' = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[ \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)}{4h^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} \right] dx$  en changeant  $a$  en  $-a$  d'où

$$H' = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[ \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)}{4h^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} \right] dx = -H. On obtient donc \Phi = -\ell \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2 \times \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \left( \frac{a}{2h} \right)^2 \right).$$

En orientant la surface dans le sens contraire de  $\vec{u}_Y$ , on obtient un flux par unité de longueur suivant  $Oz$  qui vaut  $\Phi_{\text{lin}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( 1 + \left( \frac{a}{2h} \right)^2 \right)$ .

c) Si la boucle a une longueur  $b$  le long de  $Oz$ , alors le flux induit par le champ magnétique du véhicule vaut  $\Phi_{\text{veh}} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left( 1 + \left( \frac{a}{2h} \right)^2 \right) I$ .

III.D.4-a) Par définition du coefficient d'autoinduction  $L$ , on peut écrire  $\Phi_{\text{P}} = LI$  pour le flux orienté comme  $\vec{u}_Y$  d'après le sens du courant dans la boucle.



On remarque que le flux crée par les courants induits est de signe contraire, ce qui est conforme à la loi de Lenz.

b) Le flux total orienté dans le sens de  $\vec{u}_Y$  est donc  $\Phi = \Phi_P - \Phi_{\text{v}\acute{e}h}$  soit  $\Phi = LI - \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \left(\frac{a}{2h}\right)^2\right)I$ . L'inductance propre **diminue** et devient donc

$$L' = L - \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \left(\frac{a}{2h}\right)^2\right) \text{ et la variation } \boxed{\Delta L = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \left(\frac{a}{2h}\right)^2\right)}.$$

c) D'après la question III.C.3, l'inductance propre de la boucle pour  $N=1$  vaut  $L = 125/25 = 5 \mu\text{H}$ . On a donc  $S_{\text{boucle}} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(2)}{2\pi(5 \times 10^{-6})} \ln\left(1 + \left(\frac{0,5}{2(0,2)}\right)^2\right) = 8 \times 10^{-2}$ .

d) Le champ magnétique crée au voisinage de la surface du véhicule est  $N$  fois plus grand donc le courant induit dans le véhicule aussi. Le flux induit par ce courant dans une boucle est donc  $N$  fois plus grand et dans les  $N$  boucles, il est  $N^2$  fois plus grand. On a donc  $\Delta L_N = N^2 \Delta L$  comme  $L_N = N^2 L$  et la sensibilité de la boucle **ne dépend pas de  $N$** .

## Partie IV Étude du fréquencemètre

IV.A.1) Comme  $i_S = 0$ , on a  $i = C' \frac{d}{dt}(e'(t) - V(t))$  et  $V(t) = R'i + V_0$ . On en déduit  $\frac{V(t) - V_0}{R'} = C' \frac{d}{dt}(e'(t) - V(t))$  d'où  $\boxed{\frac{dV(t)}{dt} + \frac{V(t)}{R'C'} = \frac{de'(t)}{dt} + \frac{V_0}{R'C'}}$ .

IV.A.2) Pour  $t < 0$ ,  $e'$  est constant comme  $V_0$ . Donc il s'est établi un régime constant. La présence du condensateur assure la nullité du courant constant. On a donc  $\boxed{V = V_0 \text{ pour } t < 0}$ .

La tension aux bornes du condensateur est une grandeur continue quel que soit  $t$ , en particulier  $t = 0$ . On a  $V_C = e' - V$  donc, pour  $t < 0$ , on trouve  $V_C = E - V_0$ . Comme  $V_C(t=0^+) = V_C(t=0^-)$ , on obtient  $-E - V(t=0^+) = E - V_0$  d'où  $\boxed{V(t=0^+) = V_0 - 2E}$ .

Comme  $0 < V_0 < 2E$  par hypothèse, on a  $\boxed{V(t=0^+) < 0}$ .

IV.A.3) Comme  $e'$  est constant pour  $t > 0$ , l'équation différentielle se réduit à  $\frac{dV(t)}{dt} + \frac{V(t)}{R'C'} = \frac{V_0}{R'C'}$  dont la solution générale est  $V(t) = V_0 + ae^{-\frac{t}{\tau}}$  en posant  $\tau = R'C'$ .

La condition initiale se traduit par  $V(t=0^+) = V_0 + a$  d'où  $a = -2E$ . On obtient donc  $\boxed{V(t) = V_0 - 2Ee^{-\frac{t}{\tau}}}$ .

IV.A.4) On en déduit le graphe suivant :

IV.B) L'impédance d'entrée de l'A.Op est infinie donc  $V_+(t) = e(t)$ . Par construction,  $V_- = 0$ . L'A.Op n'est pas bouclé sur son entrée inverseuse donc il fonctionne en régime saturé.

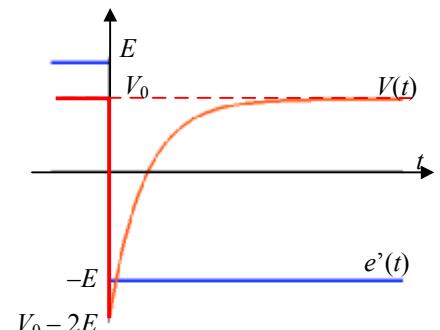
On a  $e'(t) = +V_{\text{sat}}$  tant que  $V_+ - V_- > 0$  soit tant que  $e(t) > 0$ .

On a  $e'(t) = -V_{\text{sat}}$  tant que  $V_+ - V_- < 0$  soit tant que  $e(t) < 0$ .

Comme la fréquence de  $e(t)$  vérifie  $f \ll \frac{1}{R'C'}$  soit  $\tau \ll T$  (période du signal sinusoïdal), on peut considérer que le régime constant a le temps de s'établir entre deux bascules de l'A.Op.

La bascule  $+V_{\text{sat}} \rightarrow -V_{\text{sat}}$  correspond à celle étudiée à la question précédente en remplaçant  $E$  par  $V_{\text{sat}}$ . (La condition  $0 < V_0 < 2V_{\text{sat}}$  est supposée vérifiée par hypothèse).

Prenons comme nouvelle instant origine une bascule  $-V_{\text{sat}} \rightarrow +V_{\text{sat}}$  de l'A.Op. On a donc  $e' = -V_{\text{sat}}$  et  $V = V_0$  pour  $t = 0^-$ . On en déduit  $V_C(0^-) = -V_{\text{sat}} - V_0$ . La continuité de  $V_C$  entraîne



$V_C(0^+) = V_{\text{sat}} - V(t=0^+) = -V_{\text{sat}} - V_0$ . On en déduit  $V(t=0^+) = V_0 + 2V_{\text{sat}}$  et la solution de l'équation différentielle s'écrit  $V(t) = V_0 + 2V_{\text{sat}}e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

On en déduit les chronogrammes ci-contre :

IV.C.1) L'A.Op n'est pas bouclé sur son entrée inverseuse donc il ne fonctionne pas en régime linéaire.

IV.C.2) D'après la question précédente, la tension de sortie de l'A.Op est constante. Le condensateur est chargé donc il n'y a pas de courant dans sa branche. Comme l'impédance de l'entrée + est infinie, le courant circulant dans la résistance est nul donc  $V_+(t=0^-) = 0$ .

Pour  $t < 0$ ,  $V_-(t=0^-) = U(t=0^-) = V_0$  donc  $V_+(t=0^-) - V_-(t=0^-) < 0$ . On en déduit que  $S(t=0^-) = -V_{\text{sat}}$ .

IV.C.3) Lorsque  $V_-$  passe à la valeur  $V_0 - 2V_{\text{sat}} < 0$ , on peut supposer que  $V_+ - V_-$  devient positif donc l'A.Op bascule en saturation haute.

La tension aux bornes du condensateur est continue donc

$$V_+(t=0^-) - S(t=0^-) = V_+(t=0^+) - S(t=0^+)$$

soit  $0 - (-V_{\text{sat}}) = V_+(t=0^+) - (V_{\text{sat}})$ . On en déduit  $V_+(t=0^+) = 2V_{\text{sat}}$ .

On vérifie que  $V_+(t=0^+) - V_-(t=0^+) = (2V_{\text{sat}}) - (V_0 - 2V_{\text{sat}}) = 4V_{\text{sat}} - V_0 > 0$  : l'A.Op bascule effectivement.

IV.C.4) La tension  $V_+$  ne varie pratiquement pas pendant la durée  $\tau$  donc  $V_+(t=\tau^-) = 2V_{\text{sat}}$ . À l'instant  $t = \tau$ ,  $V_-$  passe à la valeur  $V_0$ . Comme  $V_0 < 2V_{\text{sat}}$ , on peut supposer que  $V_+ - V_-$  reste positif donc l'A.Op ne bascule pas.

Si c'est le cas, la continuité de la tension aux bornes du condensateur conduit à  $V_+(t=\tau^+) = 2V_{\text{sat}}$ . On a bien  $V_+(t=\tau^+) - V_-(t=\tau^+) > 0$ . L'hypothèse est vérifiée : l'A.Op ne bascule pas entre  $t = \tau^-$  et  $t = \tau^+$ .

IV.C.5-a) Comme  $i_+ = 0$ , on peut écrire  $C \frac{d}{dt}(S(t) - V_+(t)) = \frac{V_+(t) - 0}{R}$  d'où  $\frac{dV_+(t)}{dt} + \frac{V_+(t)}{RC} = \frac{dS(t)}{dt}$ . Comme  $S = -V_{\text{sat}}$ , l'équation devient  $\frac{dV_+(t)}{dt} + \frac{V_+(t)}{RC} = 0$  dont la solution est  $V_+(t) = 2V_{\text{sat}}e^{-\frac{t}{RC}}$  compte tenu de la condition initiale en  $t = 0^+$ .

b) L'A.Op bascule en saturation basse lorsque  $V_+ = V_- = V_0$ . Comme  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_+(t) = 0$ , cela est possible à l'instant  $t_1$  tel que  $2V_{\text{sat}}e^{-\frac{t_1}{RC}} = V_0$  soit  $t_1 = RC \ln\left(\frac{2V_{\text{sat}}}{V_0}\right)$ .

La continuité de la tension aux bornes du condensateur se traduit par

$$V_+(t=t_1^-) - S(t=t_1^-) = V_+(t=t_1^+) - S(t=t_1^+)$$

soit  $V_0 - V_{\text{sat}} = V_+(t=t_1^+) - (-V_{\text{sat}})$  d'où  $V_+(t=t_1^+) = -2V_{\text{sat}}$ .

IV.C.6-a) On a vu que l'A.Op bascule à l'instant  $t_1$ . Comme  $S$  est constant, l'équation différentielle vérifiée par  $V_+(t)$  est toujours  $\frac{dV_+(t)}{dt} + \frac{V_+(t)}{RC} = 0$  dont la solution est  $V_+(t) = -2V_{\text{sat}}e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$  compte tenu de la condition initiale en  $t = t_1^+$ .

b) En  $t = T/2$ ,  $V_-$  passe à la valeur  $V_0 + 2V_{\text{sat}}$ . Comme  $V_+$  est négatif,  $V_+ - V_-$  reste négatif donc l'A.Op reste en saturation basse.

IV.C.7) Les chronogrammes sont dessinés ci-dessous :

On peut dire que l'état stable du montage est tel que  $S = -V_{\text{sat}}$ . Il reste dans cet état tant qu'une impulsion négative n'est pas appliquée à l'entrée inverseur du premier A.Op. Une fois bas-

culé dans l'état  $S = +V_{\text{sat}}$ , il n'y reste que pendant la durée  $t_1$  définie par les caractéristiques du montage ( $R, C, V_0$ ) et non par celles du signal entrant  $U(t)$ . Cet état de fonctionnement n'est donc pas stable. On a donc affaire à un montage monostable.

IV.C.8) On a vu que la bascule dans l'état instable se produit lorsque  $V_+ - V_-$  devient négatif, alors que  $V_+ = 0$  donc dès que  $V_-$  devient positif, quelle que soit la forme de  $V_-(t)$ . La tension  $V(t)$  générée par le module d'entrée convient donc aussi.

IV.D.1) Dans la partie IV.C, on a supposé  $\tau \ll RC$  où  $\tau$  est la durée de l'impulsion et  $RC \ll T$  pour assurer le retour de  $V_+$  à la valeur nulle avant l'arrivée du front descendant de  $V_-(t)$ .

Or, d'après la partie IV.B, la durée de l'impulsion est de l'ordre de  $R'C$ . On doit donc avoir  $R'C \ll RC \ll T$ .

IV.D.2) On obtient les cinq chronogrammes suivants :

La bascule du monostable se fait sur un front descendant du signal  $e(t)$ , lorsque celui-ci s'annule.

IV.D.3) La valeur moyenne d'un signal correspond à sa composante continue. **On utilise un voltmètre DC** pour mesurer  $\langle S \rangle$ .

IV.D.4) On remarque que l'expression donnée de  $t_0$  correspond à celle de  $t_1$ .

$S(t)$  vaut  $-V_{\text{sat}}$  sur la durée  $T - t_0$  et  $+V_{\text{sat}}$  sur la durée  $t_0$  donc on a  $\langle S \rangle = \frac{1}{T}(-V_{\text{sat}}(T - t_0) + V_{\text{sat}}t_0)$ . On en déduit  $f = \frac{1}{2t_0} \left( 1 + \frac{\langle S \rangle}{V_{\text{sat}}} \right)$ .

IV.E.1) On veut  $f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC_{\text{eq}}}}$  si  $\langle S \rangle = 0$ . Il faut donc  $t_0 = \pi \sqrt{LC_{\text{eq}}}$ .

IV.E.2) En différentiant logarithmiquement, on obtient  $\frac{df}{f} = -\frac{1}{2} \frac{dL}{L}$  d'où  $\frac{\Delta f}{f_{\text{sans}}} = \frac{1}{2} S_{\text{boucle}}$ .

IV.E.3) L'expression de  $f$  obtenue en IV.D.4 s'écrit  $f = f_{\text{sans}} \left( 1 + \frac{\langle S \rangle_{\text{veh}}}{V_{\text{sat}}} \right)$  et conduit à  $\frac{\Delta f}{f_{\text{sans}}} = \frac{\langle S \rangle_{\text{veh}}}{V_{\text{sat}}}$ . En identifiant, il reste  $\langle S \rangle_{\text{veh}} = \frac{1}{2} S_{\text{boucle}} V_{\text{sat}}$ .

IV.E.4) Il y a détection du véhicule si  $\langle S \rangle > \frac{1}{2} \langle S \rangle_{\text{veh}}$ .

A.N.  $\langle S \rangle_{\text{seuil}} = \frac{1}{4} (8 \times 10^{-2}) (12) = 240 \text{ mV}$ . Cette valeur est facilement mesurable.

