

Partie I – Le vélo hybride et ses supercondensateurs Centrale PSI 2025

I.1 - Étude d'un supercondensateur

Q1) On suppose le plan chargé confondu avec le plan Oyz (plan $x = 0$). En un point M , tout plan perpendiculaire au plan chargé est plan de symétrie de la distribution de charge, $\vec{E}_p(M)$ est perpendiculaire au plan $x = 0$:

$$\vec{E}_p(M) = E(M)\vec{u}_x$$

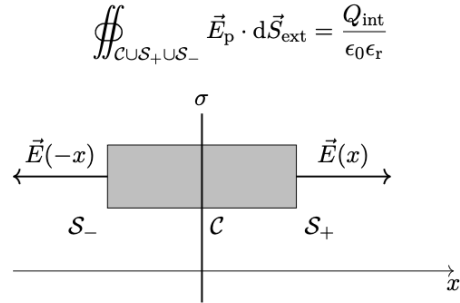
Le plan chargé est infini, donc invariant par toute translation parallèlement à lui-même, donc perpendiculairement à $\vec{u}_x$:

$$\vec{E}_p(M) = E(x)\vec{u}_x$$

Le plan chargé est plan de symétrie pour lui-même, donc en deux points M et M' symétriques par rapport au plan chargé, le champ est symétrique par rapport au plan chargé. Par conséquent comme $\vec{E}$ est orthogonal au plan :

$$\vec{E}_p(-x) = -\vec{E}_p(x) ; E(-x) = -E(x)$$

On applique le théorème de Gauss à un tube de champ, cylindre C de génératrices parallèles à $\vec{u}_x$, de section droite S , fermé par deux surfaces planes S_+ et S_- situées dans les plans parallèles au plan chargé, d'abscisses $x > 0$ et $-x$ selon $\vec{u}_x$, en tenant compte de la permittivité diélectrique relative :



La contribution de C est nulle car il s'agit d'un tube de champ : $\vec{E}_p \perp d\vec{S}_{\text{ext}}$. Les contributions de S_+ et S_- ont pour expressions

$$\iint_{S_+} \vec{E}_p \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = \iint_{S_+} E(x)\vec{u}_x \cdot dS\vec{u}_x = SE(x)$$

$$\iint_{S_-} \vec{E}_p \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = \iint_{S_-} E(-x)\vec{u}_x \cdot dS(-\vec{u}_x) = -SE(-x) = SE(x)$$

Ce tube de champ découpe une surface d'aire S sur le plan chargé, donc

$$Q_{\text{int}} = \sigma S$$

Finalement le théorème de Gauss s'écrit

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = 2SE(x > 0) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

d'où on déduit l'expression du champ électrique

$$\vec{E}_p(x > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x ; \vec{E}_p(x < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$$

On utilise le théorème de superposition pour calculer le champ total créé par les 4 plans chargés, en notant $\vec{E}_{p,\sigma,\pm}$ le champ créé par densité surfacique de charge σ du côté des x négatifs ($-$) ou des x positifs ($+$). Dans l'espace inter-électrodes, on distingue ainsi 3 zones :

— $-a < x < -a + \delta$:

$$\vec{E} = \vec{E}_{p,\sigma,+} + \vec{E}_{p,-\sigma',-} + \vec{E}_{p,\sigma',-} + \vec{E}_{p,-\sigma,-} = \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (\sigma + \sigma' - \sigma' + \sigma) \vec{u}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$$

— $-a + \delta < x < a - \delta$:

$$\vec{E} = \vec{E}_{p,\sigma,+} + \vec{E}_{p,-\sigma',+} + \vec{E}_{p,\sigma',-} + \vec{E}_{p,-\sigma,-} = \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (\sigma - \sigma' - \sigma' + \sigma) \vec{u}_x = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$$

— $a - \delta < x < a$:

$$\vec{E} = \vec{E}_{p,\sigma,+} + \vec{E}_{p,-\sigma',+} + \vec{E}_{p,\sigma',+} + \vec{E}_{p,-\sigma,-} = \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (\sigma - \sigma' + \sigma' + \sigma) \vec{u}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$$

Q2) Le potentiel vérifie $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, et sous forme intégrale $V(A) - V(B) = \int_B^A \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$. On peut donc écrire entre les deux électrodes, avec $\vec{E}(x) = E(x)\vec{u}_x$:

$$U = V(-a) - V(a) = \int_{-a}^a E(x) dx = \int_{-a}^{-a+\delta} \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} dx + \int_{-a+\delta}^{a-\delta} \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r} dx + \int_{a-\delta}^a \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} dx$$

$$U = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} (\sigma \delta + (\sigma - \sigma')(2a - 2\delta) + \sigma \delta) = \frac{2a\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} - \frac{2(a - \delta)\sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Q3) L'électrolyte est conducteur, donc la présence d'un champ électrique dans la région $-a + \delta < x < a - \delta$ non nul entraîne l'existence d'un courant électrique source d'une variation temporelle des densités surfaciques de charge sur les doubles couches : on se trouve alors en régime variable. On en déduit qu'en régime permanent le champ électrique doit être nul dans la région $-a + \delta < x < a - \delta$. D'après Q1) le champ dans cette région vaut $\frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$: en régime indépendant la nullité du champ électrique entraîne $\sigma' = \sigma$. L'expression de U devient

$$U = \frac{2\delta}{\epsilon_0 \epsilon_r} \sigma$$

En régime permanent, la densité surfacique de charge de l'électrode $x = -a$ vaut

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2\delta} U$$

On en déduit la charge Q puis la capacité C_0 du supercondensateur

$$Q = \sigma S = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{2\delta} U = C_0 U$$

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{2\delta}$$

Pour un condensateur à air de même géométrie (plan, électrodes de surface S , distance entre électrodes $2a$)

$$C_{\text{air}} = \frac{\epsilon_0 S}{2a}$$

Soit un rapport ($\epsilon_r > 1$)

$$\frac{C_0}{C_{\text{air}}} = \epsilon_r \frac{a}{\delta} \gtrsim \frac{10^{-6}}{10^{-8}} = 100 \gg 1$$

$C_0 \gg C_{\text{air}}$, d'où l'appellation supercondensateur.

I.2 - Modèle électrocinétique du supercondensateur

Q4) Dans la zone $-a + \delta < x < a - \delta$, $\vec{E} = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$, d'où une densité de courant

$$\vec{j}_{\text{elec}} = \gamma \vec{E} = \frac{\gamma(\sigma - \sigma')}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$$

Le courant électrique reçu par le plan $x = a - \delta$ de l'électrolyte (situé en $x < a - \delta$) a pour expression

$$I_{\text{reçu}} = \iint \vec{j} \cdot dS \vec{u}_x = \frac{\gamma(\sigma - \sigma')}{\epsilon_0 \epsilon_r} S$$

Comme ce plan ne reçoit de charge que de l'électrolyte (l'énoncé précise que la double couche est isolante), le bilan de charges entre t et $t + dt$ s'écrit pour ce plan

$$q'(t + dt) - q'(t) = \frac{dq'}{dt} dt = I_{\text{reçu}} dt = \frac{\gamma(\sigma - \sigma')}{\epsilon_0 \epsilon_r} S dt$$

$$\frac{dq'}{dt} = \frac{\gamma(\sigma - \sigma')}{\epsilon_0 \epsilon_r} S$$

Q5) Pour $t > 0$ la tension U est constante, et d'après Q2)

$$U = \frac{2a}{\epsilon_0 \epsilon_r} \sigma - \frac{2(a - \delta)}{\epsilon_0 \epsilon_r} \sigma'$$

ce qui permet d'exprimer σ à tout instant :

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2a} U + \frac{a - \delta}{a} \sigma'$$

D'autre part $q' = \sigma' S$, donc en remplaçant q' et σ par leurs expressions en fonction de σ'

$$S \frac{dq'}{dt} = \frac{\gamma S}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2a} U + \frac{a - \delta}{a} \sigma' - \sigma' \right) = \frac{\gamma S U}{2a} - \frac{\gamma S \delta}{\epsilon_0 \epsilon_r a} \sigma'$$

après simplification par S on obtient l'équation différentielle proposée par l'énoncé

$$\frac{d\sigma'}{dt} + \frac{\gamma \delta}{\epsilon_0 \epsilon_r a} \sigma' = \frac{\gamma U}{2a}$$

On identifie sur cette équation différentielle du premier ordre en σ' le temps caractéristique

$$\tau = \frac{a \epsilon_0 \epsilon_r}{\delta \gamma}$$

Si on modélise le supercondensateur par l'association série d'un condensateur et d'une résistance, l'équation d'évolution de la charge q du supercondensateur soumis à la tension U s'écrit

$$u_C + u_R = \frac{q}{C_0} + R_0 \frac{dq}{dt} = U$$

Or en notant $q' = S\sigma'$ la charge associée à σ' , l'équation de la question précédente s'écrit

$$\frac{dq'}{dt} + \frac{\gamma \delta}{\epsilon_0 \epsilon_r a} q' = \frac{\gamma S U}{2a}$$

ou

$$U = \frac{2a}{\gamma S} \frac{dq'}{dt} + \frac{2\delta}{\epsilon_0 \epsilon_r S} q' = R_0 \frac{dq'}{dt} + \frac{q'}{C_0}$$

soit par identification

$$R_0 = \frac{2a}{\gamma S} ; C_0 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{2\delta}$$

On retrouve la valeur de C_0 , et on peut interpréter R_0 comme la résistance associée à l'électrolyte de conductivité γ et d'épaisseur approchée $2a$.

I.3 - Dimensionnement du pack de supercondensateurs du vélo hybride

Q6) La tension $u_C = q/C_0$ aux bornes d'une capacité est continue, donc entre les instants $t = 0^-$ et $t = 0^+$

$$R_0(i_0^+ - i_0^-) + \frac{q(0^+) - q(0^-)}{C_0} = R_0(i_0^+ - i_0^-) = U(0^+) - U(0^-)$$

soit

$$R_0 = \frac{U(0^+) - U(0^-)}{i_0^+ - i_0^-} = \frac{2,95 - 3,00}{33} = 1,5 \times 10^{-3} \Omega$$

Pour $0 < t < T$, i est constant, d'où

$$\frac{q(T^-) - q(0^+)}{C_0} + R_0(i(T^-) - i(0^+)) = \frac{i(T - 0)}{C_0} = U(T^-) - U(0^+)$$

soit

$$C_0 = \frac{iT}{U(T^-) - U(0^+)} = \frac{-33 \times 14,5}{1,5 - 2,95} = 3,3 \times 10^2 \text{ F}$$

(Sur la figure 6, on lit effectivement la valeur 330 F)

Q7) On calcule le travail que doit fournir le pack, en négligeant pertes électriques et mécaniques du vélo. La variation d'énergie potentielle de pesanteur pour l'ensemble cycliste/vélo, de masse total 100 kg d'après l'énoncé vaut

$$\Delta \mathcal{E}_p = mg\Delta h = 100 \times 9,81 \times 60 = 59 \text{ kJ}$$

Pour un niveau d'assistance faible (50%) le pack doit fournir 1/3 de cette énergie soit 20 kJ

La pack initialement chargé à tension nominale V_N peut se décharger jusqu'à $V_N/2$, soit une énergie fournie

$$\mathcal{E}_c = -\Delta \left(\frac{CU^2}{2} \right) = \frac{C}{2} (V_N^2 - (V_N/2)^2) = \frac{3}{8} CV_N^2 = \frac{3 \times 330 \times 3^2}{8} = 1,1 \text{ kJ}$$

Par conséquent le travail nécessaire au franchissement du dénivelé nécessite $N = 20/1,1 = 18$ condensateurs.

Le moteur nécessite une tension de 36 V pour son fonctionnement, tandis que chaque condensateur a une tension nominale de 3 V et minimale de 1,5 V, donc le fonctionnement du moteur nécessite au minimum $36/3 = 12$ condensateurs chargés à V_N en série.

On peut utiliser 18 condensateurs en série et un dispositif permettant d'abaisser la tension lorsque les condensateurs sont à leur tension nominale V_N et de la relever lorsqu'il sont déchargés à $V_N/2$ (c'est l'objet de la sous-partie suivante, dont les données confirment l'association de 18 condensateurs de tension nominale $V_N = 3 \text{ V}$ en série : $V_{\max} = 54 \text{ V} = 18 \times 3 \text{ V}$ et $V_{\min} = V_{\max}/2$).

Partie II – Lévitation magnétique Mines Ponts PSI 2023

22. L'excitation magnétique $\vec{H}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ sont reliés par la relation

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}.$$

On remarque que $\vec{H}$ et $\vec{M}$ ont alors la même dimension. On a ainsi

$$[\chi] = 1.$$

Pour un matériau magnétique linéaire, on définit la perméabilité magnétique relative μ_r par l'expression

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}.$$

Or, on a

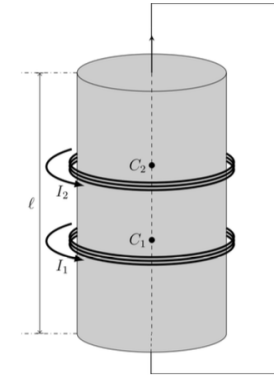
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}.$$

Ainsi

$$\mu_r = 1 + \chi.$$

23. Puisque ces lignes de champ sont des droites parallèles à l'intérieur du matériau magnétique, on sait que le champ $\vec{B}$ est uniforme. Par ailleurs, d'après la question précédente, les champs $\vec{H}$ et $\vec{M}$ sont proportionnels à $\vec{B}$, ils sont donc également uniformes.

Appliquons le théorème d'Ampère dans un milieu magnétique au contour fermé représenté ci-dessous.



On a

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre, enlacé}}.$$

Comme le champ $\vec{B}$ à l'extérieur du matériau est négligée, le champ $\vec{H}$ l'est également. En notant $\vec{H} = H_0 \hat{e}_z$, on obtient alors

$$H_0 l = N_1 I_1 + N_2 I_2.$$

Or $B_0 = \mu_0 \mu_r H_0$, d'où

$$B_0 = \frac{\mu_0 \mu_r (N_1 I_1 + N_2 I_2)}{l}.$$

24. Le flux à travers la première bobine s'écrit

$$\varphi_1 = N_1 \pi R^2 B_0 = N_1 \pi R^2 \frac{\mu_0 \mu_r (N_1 I_1 + N_2 I_2)}{l}.$$

Or

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{21} = L_1 I_1 + M_0 I_2.$$

Par identification, on obtient alors

$$L_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1^2 \pi R^2}{l} \quad \text{et} \quad M_0 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 \pi R^2}{l}.$$

Par le même raisonnement appliqué à la deuxième bobine, on trouve

$$L_2 = \frac{\mu_0 \mu_r N_2^2 \pi R^2}{l}$$

et heureusement la même expression pour M_0 .

25. La loi des mailles dans la bobine numéro 2 s'écrit :

$$I_2(z, t) = G \times e(z, t) = -G \frac{d\varphi_{12}(z, t)}{dt} - G \frac{d\varphi_{22}(z, t)}{dt}$$

avec $\varphi_{12}(z, t) = M(z)I_1(t)$ et $\varphi_{22}(z, t) = L_2 I_2(z, t)$. Ensuite, il faut effectuer une identification. On réécrit la loi des mailles en complexes, soit :

$$\underline{I_2} = -jG\omega \times (M(z)I_1 + L_2 \underline{I_2})$$

Le but est d'exprimer $\underline{I_2}$ en fonction de $\underline{I_1}$ puis de I . D'abord on peut remettre en forme la relation ci-dessus pour isoler $\underline{I_2}$:

$$\underline{I_2} = \frac{-jG\omega M(z) \times (1 - jG\omega L_2)}{(1 + jG\omega L_2) \times (1 - jG\omega L_2)} \underline{I_1} = -\frac{jG\omega M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2} \underline{I_1} - \frac{G^2 \omega^2 L_2 M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2} \underline{I_1}$$

On prend donc ensuite la partie réelle de ce nombre complexe, or $\underline{I_1} = I \exp(j\omega t)$ d'où :

$$\underline{I_2} = -\frac{G\omega M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2} I \exp\left(j\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)t\right) - \frac{G^2 \omega^2 L_2 M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2} I \exp(j\omega t)$$

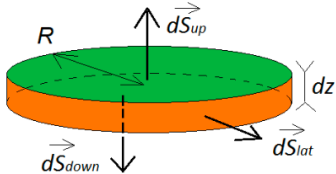
soit, en réels :

$$I_2(z, t) = \frac{G\omega M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2} I \sin(\omega t) - \frac{G^2 \omega^2 L_2 M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2} I \cos(\omega t)$$

d'où $\alpha(z) = \frac{G^2 \omega^2 L_2 M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2}$ et $\beta(z) = \frac{G\omega M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2}$.

Remarque : le calcul peut également être mené en restant en réels de bout en bout.

26. On peut écrire la conservation du flux magnétique sur un disque de rayon R d'épaisseur dz , compris entre les côtes z et $z + dz$ (où se situe la bobine numéro 2), représenté ci-dessous :



On a $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$, qui donne :

$$\iint_{up} \vec{B} \cdot (dS_{up} \hat{e}_z) + \iint_{down} \vec{B} \cdot (-dS_{down} \hat{e}_z) + \iint_{lat} \vec{B} \cdot (dS_{lat} \hat{e}_r) = 0$$

soit, en admettant que la composante verticale du champ magnétique ne dépend toujours que de z :

$$B_z(z + dz)\pi R^2 - B_z(z)\pi R^2 + (2\pi R dz)B_r(z) = 0$$

puis :

$$\frac{dB_z}{dz}(z) = -\frac{2}{R} B_r(z)$$

Ainsi :

$$B_r(z) = -\frac{R}{2} \frac{dB_z}{dz}(z)$$

Il nous faudrait $B_z(z)$. Et justement $\varphi_{12}(z, t) = M(z)I_1(t) = N_2 \int_{up} \vec{B} \cdot (dS_{up} \hat{e}_z) = N_2 \pi R^2 B_z(z)$ soit $B_z(z) = \frac{M(z)I_1(t)}{N_2 \pi R^2} = \frac{M_0 f(z)I_1(t)}{N_2 \pi R^2}$.

On peut donc évaluer la dérivée de sorte que :

$$B_r(z) = -\frac{R}{2} \times \frac{M_0 I_1(t)}{N_2 \pi R^2} \times \frac{df}{dz}(z) = -\frac{R}{2} \times \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 \pi R^2}{l} \times \frac{I_1(t)}{N_2 \pi R^2} \times \frac{df}{dz}(z)$$

soit

$$B_r(z) = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 R}{2l} I_1(t) \frac{df}{dz}(z)$$

27. La force exercée sur la bobine numéro 2 est :

$$\vec{F} = \int_0^{N_2 2\pi} I_2(z, t) d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_0^{N_2 2\pi} I_2(z, t) R d\theta \hat{e}_\theta \wedge (B_r \hat{e}_r + B_\theta \hat{e}_\theta + B_z \hat{e}_z) = I_2(z, t) R \int_0^{N_2 2\pi} (-B_r \hat{e}_z + B_z \hat{e}_r) d\theta$$

Or B_z est constant sur le contour de l'intégrale donc :

$$\int_0^{N_2 2\pi} B_z \hat{e}_r d\theta = B_z \int_0^{N_2 2\pi} \hat{e}_r d\theta = \vec{0}$$

Ainsi l'expression de $\vec{F}$ se réduit à sa composante verticale qui est :

$$F_z(z, t) = -I_2(z, t) R \int_0^{N_2 2\pi} B_r \hat{e}_z d\theta = -N_2 2\pi R B_r I_2(z, t) = \frac{2\pi \mu_0 \mu_r N_1 N_2 R^2}{2l} \times \frac{df(z)}{dz} \times I_1(t) I_2(z, t)$$

On veut la valeur moyenne temporelle de cette période qui va se déduire de celle du produit $I_1(t)I_2(z, t)$ qui concentre toute la dépendance temporelle. On a :

$$\langle I_1(t)I_2(z, t) \rangle = I^2 \beta(z) \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = -I^2 \alpha(z) \langle \cos^2(\omega t) \rangle = -\frac{I^2 \alpha(z)}{2}$$

donc :

$$\langle F_z \rangle = -\frac{\pi \mu_0 \mu_r N_1 N_2 R^2 I^2}{2l} \alpha(z) \frac{df(z)}{dz}$$

On attend que $M(z)$ soit positive et décroisse avec z (l'induction est d'autant moins ressentie que la bobine 2 est éloignée de la bobine 1), ainsi $\alpha(z) > 0$ est positif et $\frac{df}{dz} < 0$. De sorte que la force est positive.

Cette force est d'autant plus forte que z est petit. C'est bien logique, parce que les lignes de champ s'évasent à partir de la bobine 1 si on prend en compte la composante radiale. L'évasement se traduit par une diminution de l'intensité du champ magnétique à mesure que z augmente. C'est cette situation qui peut conduire à une potentielle lévitation magnétique. A cette force vers le haut s'ajoute en effet le poids orienté vers le bas évidemment. Si ces deux forces se compensent pour une altitude donnée, on va observer un équilibre. Ce serait très intéressant à tester en pratique!

**Partie III – Freinage inductif
Mines Ponts PSI 2024**

6) On suppose que le courant électrique circule de manière orthoradiale dans l'anneau.

Alors la loi d'ohm $\vec{j}_{(r,\varphi)} = \gamma \vec{E}_{(r,\varphi)}$ donne $j = -\gamma \cdot \frac{1}{n_i} \cdot \frac{dV}{d\theta}$

V étant supposé indépendant de r (puisque $e \ll n_i$). On a donc, en multipliant membre à membre par la section de la couronne $dS = e \cdot dz$: $I = -\gamma e dz \frac{dV}{d\theta} \cdot \frac{1}{n_i}$ soit $I \cdot d\theta = -\gamma e dz dV \cdot \frac{1}{n_i}$

puis en intégrant sur l'ensemble du contour :

$$I \cdot 2\pi = + \gamma e dz \cdot U \cdot \frac{1}{n_i}$$

$$\text{soit } R = \frac{U}{I} = \frac{2\pi n_i}{\gamma e dz}, \text{ conforme à l'expression } \frac{l}{\gamma S}$$

de la géométrie cartésienne avec $\begin{cases} l = 2\pi n_i \\ S = e dz \end{cases}$ car ici le fait de

considérer $e \ll n_i$ consiste à ramener la géométrie cylindrique à une géométrie cartésienne (l'effet de courbure ne se fait pas sentir, j'est indépendant de r , autrement dit on peut "dérouler" l'anneau pour en faire un parallélépipède).

$$\text{On a donc } dG = \frac{\gamma e dz}{2\pi n_i} \text{ conductance élémentaire de cet anneau.}$$

7) Flux magnétique envoyé par l'aimant à travers l'anneau :

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cdot \frac{n_i}{(n_i^2 + (z+vt)^2)^{3/2}}$$

Analyse dimensionnelle : on a $\Phi_0 = \mu_0^a \cdot M_0^b \cdot n_i^c$

Φ_0 flux magnétique ($T \cdot m^2$)

M_0 moment magnétique ($A \cdot m^2$)

μ_0 ($H \cdot m^{-1}$)

$$\text{or } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{\mathcal{M}} \right) \text{ avec } \vec{\mathcal{M}} = \frac{d\vec{M}}{dt} \rightarrow \mu_0 M_0 \text{ en } H m^{-1} \cdot A m^2$$

donc en $HA m$
donc en $T m^3$.

$$1T = 1HA m^{-2}$$

Qd. $T \cdot m^2$ est atteint

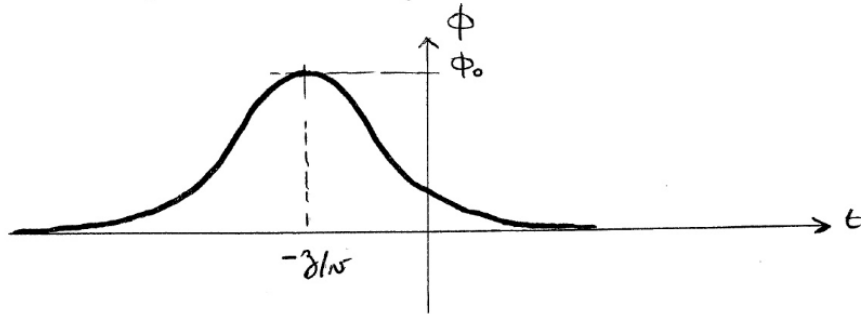
$$\text{pour } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases}$$

Allure de la courbe $\Phi(t)$:

- maximale pour $t = -\frac{z}{v}$ instant auquel l'anneau est

traversée par la balle: $\Phi_{\max} = \Phi_0$

- nulle pour $t \rightarrow -\infty$ et pour $t \rightarrow +\infty$



$$8) x = \frac{z+vt}{n_i} \rightarrow \Phi(x) = \Phi_0 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

La loi des mailles pour l'anneau, électriquement équivalent à une conductance dG en série avec une fém e (fém d'induction de Faraday) s'écrit: $i = dG \cdot e$ (loi d'Ohm)

→ puissance dissipée par effet Joule $dP_J = dG \cdot e^2$

→ avec loi de Faraday: $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$$\text{Or } x = \frac{z+vt}{n_i} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{v}{n_i} \rightarrow e = -\frac{v}{n_i} \cdot \frac{d\Phi}{dx}$$

$$\text{soit } e = -\frac{v}{n_i} \cdot \Phi_0 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (2x) \cdot (1+x^2)^{-5/2}$$

$$\text{donc } e^2 = \frac{v^2}{n_i^2} \cdot \Phi_0^2 \cdot 9x^2 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^5}$$

$$\text{et } dP_J = \underbrace{\frac{\gamma e dz}{2\pi n_i}}_{dG} \times \underbrace{\frac{N^2}{n_i^2} \cdot 9\Phi_0^2 \cdot \frac{x^2}{(1+x^2)^5}}_{e^2}$$

$$\begin{cases} \text{avec } x = \frac{z+vt}{n_i} \rightarrow \bar{a} \text{ fixe } dz = n_i \cdot dx \\ \text{et avec } \Phi_0 = \frac{\mu_0 M_0}{n_i} \end{cases}$$

$$\rightarrow dP_J = \frac{9}{2\pi} \cdot \gamma e \cdot N^2 \cdot \frac{\mu_0^2 M_0^2}{n_i^4} \cdot \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^5}$$

5

9) P_J est instantanée. On a $h \gg r_i$ donc $\bar{a} \approx t$ donné 6

quand la balle est dans le tube, $P_J = \int_{z=0}^h dP_J$ se rapproche de $\int_{z=-\infty}^{+\infty} dP_J = \int_{x=-\infty}^{+\infty} dP_J$ car la tranche dissipée par tranche de hauteur $dz = dx$ décroît très vite dès que l'on s'éloigne de la cote z où est la balle, d'après la courbe de Φ_0 tracée à la 7).

10) $\bar{A}$ n'est constante, à tout instant toute l'énergie potentielle de pesanteur qui se développe est convertie en énergie électrique, ce qui se traduit par le transfert de puissance instantané

$$\underbrace{-\vec{F} \cdot \vec{v}}_{\substack{\text{puissance de la force} \\ \text{de freinage, prise} \\ \text{positive ici} \\ (\vec{F} \text{ opposée à } \vec{v})}} = P_J \rightarrow F = K M_0^2 v$$

$$\text{soit } \vec{F} = -K M_0^2 \vec{v} \quad (\text{résistance au mouvement}).$$

11) La puissance Joule qui se développe et dissipe l'énergie mécanique de la balle est, pour une couronne élémentaire, $dP_J = dG \cdot e^2$.

Si on prend de l'aluminium ou de l'acier à la place du cuivre, Φ_0 est inchangé, c'est dG qui est modifiée. Or dG est proportionnelle à γ et

$$\begin{cases} \gamma_{Al} = 3,7 \cdot 10^7 \text{ S m}^{-1} < \gamma_{cu} = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S m}^{-1} \\ \gamma_a = 7,7 \cdot 10^6 \text{ S m}^{-1} < \gamma_{cu} = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S m}^{-1} \end{cases}$$

donc dP_J est moins grande donc la vitesse de chute plus grande.

à même vitesse la résistance au mouvement est moins forte, il faut donc une plus grande vitesse pour accéder à une plus forte résistance au mouvement, qui équilibre le poids.

Étant donné les résultats des questions 8) et 10) on a que

$$\vec{F} = -K M_0^2 \vec{v} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} &\rightarrow K \text{ proportionnel à } \gamma \\ &\rightarrow \vec{F} \text{ qui équilibre le poids donc toujours} \end{aligned}$$

de même intensité.

7

On a donc v inversement proportionnelle à γ donc une durée de chute $\Delta t = \frac{h}{v}$ proportionnelle à γ .

Ainsi, par règle de proportionnalité, et sans calculatrice, on évalue :

$$\gamma_{Al} = 5,7 \cdot 10^7 \text{ Sm}^{-1} \rightarrow \Delta t = 4,00$$

$$\gamma_{Al} = 3,7 \cdot 10^7 \text{ Sm}^{-1} \rightarrow \Delta t = 4,0 \times \frac{3,7}{5,7} = 2,70$$

$$\gamma_a = 7,7 \cdot 10^6 \text{ Sm}^{-1} \rightarrow \Delta t = 4,0 \times \frac{0,77}{5,7} = 0,50.$$

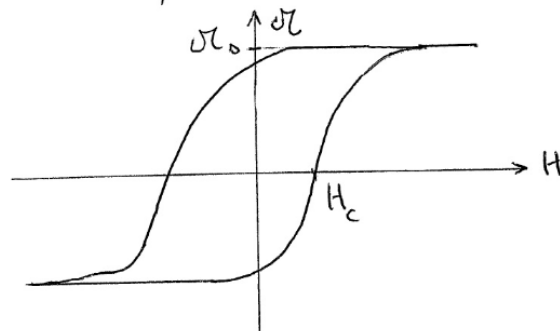
12) Le bilan du transfert d'énergie entre énergie potentielle de pesanteur et chaleur (par induction et effet Joule) s'écrit, sur l'ensemble de la chute de durée Δt_R à vitesse considérée constante :

$$P_J \cdot \Delta t_R = mgh$$

ce qui donne $K M_0^2 v^2 \Delta t_R = mgh$ avec $v = \frac{h}{\Delta t_R}$

$$\rightarrow M_0 = \sqrt{\frac{mgh \Delta t_R}{Kh}}$$

AN $\left. \begin{array}{l} m = 33 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \\ g = 10 \text{ m.s}^{-2} \\ \Delta t_R = 4,0 \text{ s} \\ h = 0,2 \text{ m} \\ K = 2,3 \end{array} \right\} M_0 = \sqrt{\frac{132 \cdot 10^{-2}}{0,56}} = \sqrt{2,4}$
soit $M_0 \approx 1,6 \text{ Am}^2$.



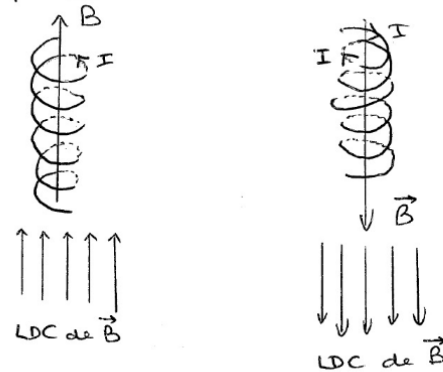
13)

À partir de M_0 on mesure σ_R puisque l'aimant utilisé possède son aimantation rémanente (il a été aimanté avec une excitation H qui, revenue à zéro, lui laisse l'aimantation σ_R).

On a
$$\underbrace{M_0}_{(\text{Am}^2)} \approx \underbrace{V}_{\text{volume de l'aimant}} \cdot \underbrace{\sigma_R}_{(\text{Am}^{-1})}$$

IC | Freinage ferroviaire rhéostatique

14) La règle de la main droite permet de déterminer l'orientation de $\vec{B}$ à partir du sens du courant circulant dans les bobines :



15) Il est impossible de déterminer le sens de $\vec{j}$ des courants induits à partir d'une photo instantanée, car le champ magnétique induit $\vec{B}_i$ que créent ces courants s'oppose aux variations de $\vec{B}$ (loi de Lenz : la fém induite s'oppose par ses effets aux variations de $\vec{B}$ qui lui donnent naissance).

La géométrie des lignes de champ de $\vec{j}$ est circulaire.