

DS de Physique difficulté supérieure 11 février 2026

PSI - Lycée du Parc des Loges

Durée 4H

Calculatrices autorisées

Partie I – Le vélo hybride et ses supercondensateurs

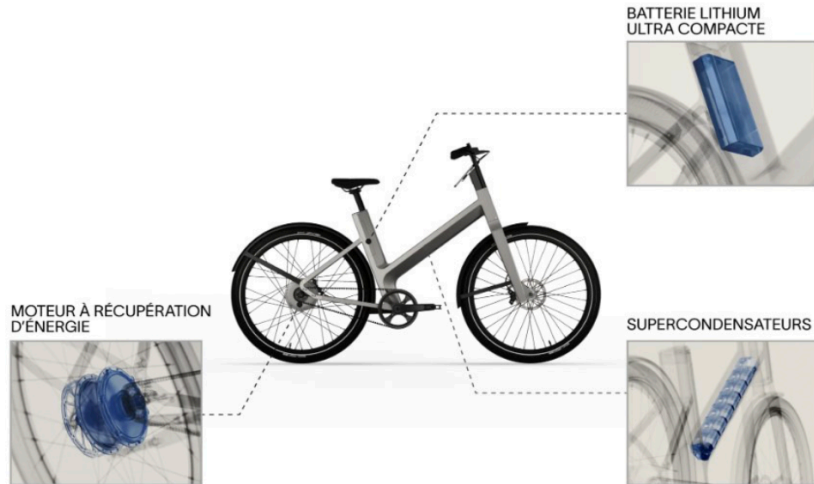


Figure 1 – Les différents éléments du vélo hybride.

Le vélo étudié associe des supercondensateurs, pour une récupération rapide de l'énergie, à une petite batterie lithium-ion de 80 Wh (650 grammes) pour améliorer l'autonomie. En ville, l'autonomie de ce vélo est celle d'un vélo classique doté d'une batterie de 400 Wh. Le vélo est équipé de roues de 26 pouces (rayon $R_r = 0,35$ m).

Les supercondensateurs sont conçus pour stocker et restituer rapidement de l'énergie électrique, en quantité bien supérieure aux condensateurs usuels et avec des temps de réponse et des puissances échangées bien meilleurs que ce que permettent les batteries électrochimiques classiques.

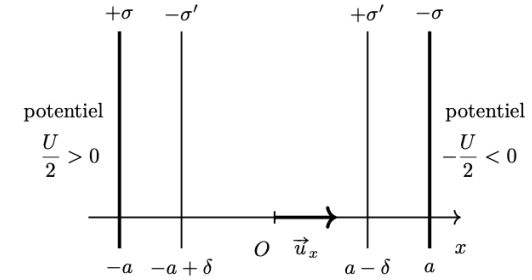


Figure 3 – Schéma du condensateur à double couche.

À la différence d'un condensateur usuel, les deux électrodes d'un supercondensateur ne sont pas séparées par un isolant mais par une solution contenant des ions. Lorsque le condensateur est déchargé, les ions sont répartis aléatoirement dans la solution. Lorsqu'il est chargé, les ions négatifs sont attirés vers l'électrode portant une charge positive et réciproquement, ce qui conduit à une accumulation d'ions au voisinage de chaque électrode formant une double couche électrochimique.

Dans toute la suite, on considère le supercondensateur comme un système purement unidimensionnel d'axe (Ox) , de surface transverse S et d'épaisseur totale $2a$ ($\sqrt{S} \gg a$). Les propriétés électromagnétiques du solvant de l'électrolyte sont analogues à celles du vide, mais avec une permittivité diélectrique $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ au lieu de ε_0 .

I.1 – Étude d'un supercondensateur

Compte tenu de la très faible épaisseur de la double couche électrochimique, on la modélise simplement par une distribution surfacique de charge σ' , distante des électrodes d'une distance $\delta \ll a$ (voir figure 3). En pratique, δ peut atteindre une dizaine de nanomètres alors que a peut difficilement être inférieure au micromètre. Ce modèle est appelé modèle de Helmholtz.

Q1. Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}_p$ créé par un plan infini de densité surfacique de charge σ . En déduire le champ électrostatique $\vec{E}$ entre les deux électrodes du condensateur double couche ($-a < x < a$).

Q2. En raisonnant sur le potentiel électrostatique, montrer que

$$U = \frac{2a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \sigma - \frac{2(a - \delta)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \sigma'.$$

Q3. Justifier qu'en régime indépendant du temps, on a $\sigma' = \sigma$. En déduire l'expression de la capacité C_0 du supercondensateur en régime indépendant du temps. Comparer C_0 à la capacité d'un condensateur de même géométrie dans lequel la solution ionique serait remplacée par de l'air, de permittivité diélectrique ε_0 .

I.2 – Modèle électrocinétique du supercondensateur

Contrairement aux condensateurs usuels dont le temps de charge (ou de décharge) est essentiellement gouverné par la résistance du circuit extérieur, le temps de réponse des supercondensateurs, et donc la puissance maximale qu'ils peuvent délivrer, est dû au temps nécessaire pour former la double couche électrochimique par transport de charge au sein de l'électrolyte.

À l'instant initial $t = 0$, le supercondensateur est soumis à un échelon de tension U à ses bornes. Les doubles couches se forment progressivement, partant de $\sigma'(t = 0) = 0$. Les expressions des champs électriques sont celles calculées à la question **Q1**, avec $\sigma' \neq \sigma$ a priori. On note γ la conductivité électrique de la solution, sachant que les doubles couches ($-a < x < -a + \delta$ et $a - \delta < x < a$) ne permettent pas le déplacement d'ions et sont donc isolantes.

Q4. Réaliser un bilan de charge entre t et $t + dt$ pour le plan chargé se trouvant en $x = a - \delta$ et montrer que sa charge q' vérifie

$$\frac{dq'}{dt} = \gamma \frac{\sigma - \sigma'(t)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} S.$$

Q5. En déduire que

$$\frac{d\sigma'}{dt} + \frac{\delta\gamma}{a\varepsilon_0\varepsilon_r}\sigma' = \frac{\gamma}{2a}U.$$

Identifier un temps caractéristique τ d'évolution de σ' . On modélise le supercondensateur par l'association d'un condensateur de capacité C_0 en série avec une résistance R_0 . Déterminer R_0 en fonction des paramètres du problème.

I.3 – Dimensionnement du pack de supercondensateurs du vélo hybride

Pour déterminer expérimentalement les paramètres R_0 et C_0 du supercondensateur, on réalise le montage de la figure 4, dans lequel le supercondensateur est associé en série à une source idéale. On réalise un test de caractérisation dans lequel l'intensité I varie avec le temps comme indiqué sur la figure 5.

Q6. D'après les résultats du test de caractérisation présentés sur la figure 5, déterminer les valeurs numériques de R_0 et C_0 . On note V_N la tension nominale d'une cellule.

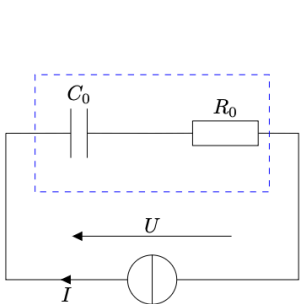


Figure 4 – Modèle du supercondensateur.

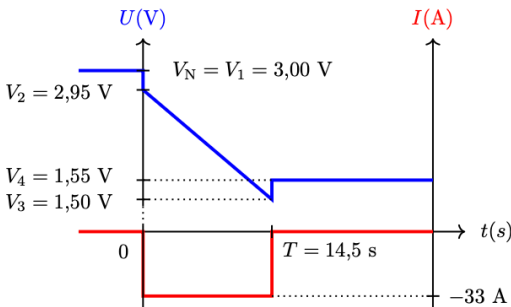


Figure 5 – Test de caractérisation en décharge. La courbe du haut représente les variations de la tension U et celle du bas les variations de l'intensité I .

Bien que les supercondensateurs puissent être totalement déchargés, il est d'usage de ne pas les décharger complètement au cours de leur utilisation. En effet, les faibles niveaux de tension ainsi que les forts courants associés (à puissance constante) peuvent complexifier la gestion du pack. Classiquement, la valeur minimale de tension est choisie à la moitié de la valeur nominale.



Figure 6 – Un supercondensateur...

Masse	70 g
Hauteur	62,7 mm
Diamètre	35,2 mm
Courant maximal	33 A

Figure 7 – ... et quelques unes de ses caractéristiques.

Le pack de supercondensateurs doit satisfaire aux exigences suivantes :

- le pack alimente un moteur synchrone à aimants permanents de 250 W sous une tension de 36 V ;
- sans utiliser la batterie lithium-ion, le pack de supercondensateurs doit permettre de franchir des dénivelés de 60 m avec un niveau d'assistance faible de 50 % (rapport de l'énergie fournie par le pack sur l'énergie fournie par le cycliste). Cela permet de se déplacer dans la grande majorité des villes de France.

Q7. En explicitant les hypothèses simplificatrices réalisées, estimer le nombre de condensateurs que le pack doit comporter pour répondre aux exigences en respectant les contraintes mentionnées. Préciser l'assemblage nécessaire (en série et/ou en parallèle). Des données numériques utiles figurent à la fin de l'énoncé.

Données numériques partie I

Masse du vélo	$M_{\text{vélo}} = 20 \text{ kg}$
Masse du cycliste	$M_{\text{cycliste}} = 80 \text{ kg}$
Accélération de la pesanteur	$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Partie II – Lévitation magnétique

Ce sujet est consacré à l'étude de divers phénomènes physiques décrits dans le système de coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires) (r, θ, z) du point M rappelé sur la figure 1 ; m est le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) . On rappelle aussi, dans ce système de coordonnées, les expressions de plusieurs opérateurs de l'analyse vectorielle. Les vecteurs sont surmontés d'une flèche ($\vec{a}$) sauf s'ils sont unitaires et sont alors repérés par un chapeau ($\hat{e}_x$).

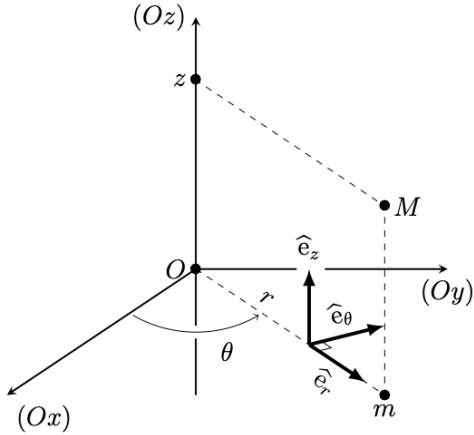


FIGURE 1 – Coordonnées cylindriques d'axe (Oz) .

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \hat{e}_r + \dots$$

$$\dots + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_z$$

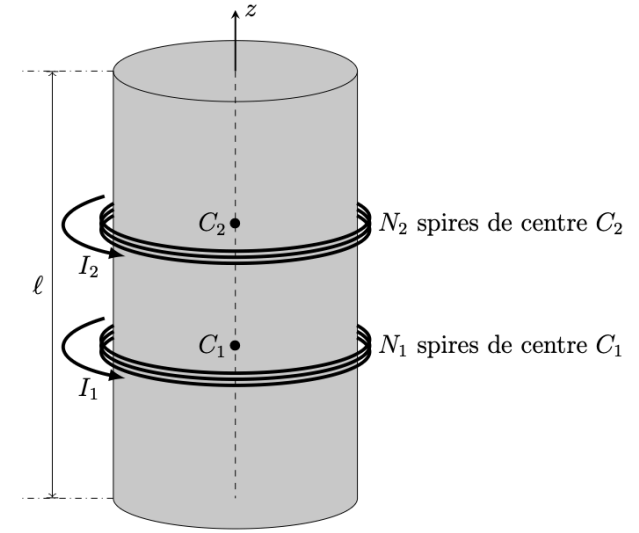


FIGURE 5 – Système de deux bobines.

- – 23. Montrer que ces trois champs sont uniformes dans ce milieu.

En négligeant le champ magnétique à l'extérieur du milieu magnétique, exprimer B_0 en fonction de μ_r , μ_0 , N_1 , N_2 , ℓ et des courants I_1 et I_2 dans les deux bobines.

- – 24. En déduire les inductances propres L_1 et L_2 des deux bobines et leur inductance mutuelle M_0 .

Dans ce qui suit, la bobine N° 1 est fixe à la base $z = 0$ du cylindre et l'on considère que C_1 se situe à l'origine O de l'axe (Oz) . La bobine N° 2 est mobile ; on note z l'abscisse de son centre C_2 . On suppose enfin que l'inductance mutuelle $M(z)$ est une fonction positive monotone décroissante de z qu'on écrira sous la forme $M(z) = M_0 f(z)$.

Le courant électrique $I_1(t) = I \cos(\omega t)$ est imposé par un générateur que l'on ne précisera pas. La spire N° 2 est fermée sur elle-même et on nomme G sa conductance électrique.

- – 25. Déterminer, en régime harmonique forcé et à altitude z fixée, l'expression du courant induit sous la forme $I_2(z, t) = I[\beta(z) \sin(\omega t) - \alpha(z) \cos(\omega t)]$. On exprimera les fonctions $\beta(z)$ et $\alpha(z)$ en fonction de G , $M(z)$, ω et L_2 .
- – 26. Montrer que, dans des conditions d'approximation à préciser, l'expression de la composante radiale du champ $\vec{B}_{1 \rightarrow 2}$ créé par la bobine N° 1 au niveau de la bobine N° 2, s'écrit

$$B_r = \hat{e}_r \cdot \vec{B}_{1 \rightarrow 2} \simeq -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 R}{2\ell} I_1(t) \frac{df}{dz}.$$

- – 27. En déduire la valeur moyenne, sur une période, de la force exercée sur la bobine N° 2. Commenter son signe et l'influence de z sur cette force.

On dispose (voir figure 5) deux spires plates, formées respectivement de N_1 et N_2 spires circulaires de rayon R et d'axe (Oz) ; elles entourent toutes les deux un cylindre de rayon très légèrement inférieur à R , de hauteur ℓ , formée d'un matériau magnétisable ; on note $\vec{M}$ l'aimantation du matériau (moment dipolaire magnétique par unité de volume) et on supposera le milieu linéaire de susceptibilité magnétique χ : $\vec{M} = \chi \vec{H}$ où $\vec{H}$ est l'excitation magnétique.

- – 22. Déterminer la dimension de χ .

Quelle relation lie $\vec{H}$ et le champ magnétique $\vec{B}$?

Définir puis exprimer la perméabilité magnétique relative μ_r du milieu.

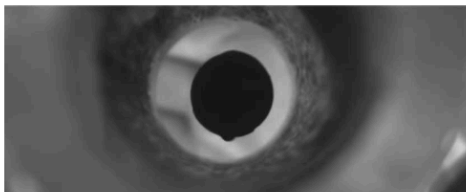
On admet que les lignes de champ des vecteurs $\vec{H}$, $\vec{B}$ et $\vec{M}$ à l'intérieur du milieu magnétique sont des droites parallèles à (Oz) . On notera $\vec{B} = B_0(z) \hat{e}_z$

Partie III – Freinage inductif

On s'intéresse ici à une conséquence électromécanique de la loi de l'induction de Lenz–Faraday : le freinage inductif. Le déplacement d'une source de champ magnétique (aimant, bobinage) mobile en présence d'un conducteur électrique immobile (dans le premier problème), tout comme le déplacement d'un circuit électrique mobile dans une zone de champ magnétique statique (dans le second) ont pour conséquence le freinage du système mobile.

Dans le premier cas, le freinage inductif se manifeste par la dissipation de puissance par effet Joule du fait de la circulation de courants induits en volume (courants de Foucault) : c'est le principe des freins rhéostatiques installés sur certains véhicules lourds (autocars en zone de montagne, trains) lorsque le frottement de traînée aérodynamique et le freinage par friction ne suffisent pas.

On s'inspire ici d'une vidéo de vulgarisation du MIT^a. D'après le commentaire proposé, « *Un aimant est abandonné le long d'un tube de cuivre et y subit une force résistive. La chute de l'aimant induit un courant dans le tube de cuivre et, du fait de la loi de Lenz, ce courant crée un champ magnétique qui s'oppose aux variations du champ dues à la chute de l'aimant. Ce dernier est ainsi repoussé et tombe plus lentement.* »



On voit (photographie ci-contre à droite) l'expérimentateur attendre plusieurs secondes l'arrivée de l'aimant à la base du tube alors que la même chute sans les effets inductifs dure quelques centièmes de seconde. Une vue par le haut (ci-dessus) montre l'aimant, sphérique, dans le tube pendant sa chute.

a. voir <https://www.youtube.com/watch?v=N7tIi71-AjA>

Dans ce qui suit on négligera le freinage aérodynamique. Le tube de cuivre a pour rayon intérieur $r_i = 15\text{ mm}$ et pour épaisseur $e = 7\text{ mm}$. On s'intéresse à une situation où l'aimant progresse vers le bas à la vitesse v supposée constante le long de l'axe (Oz) du tube (figure 2).

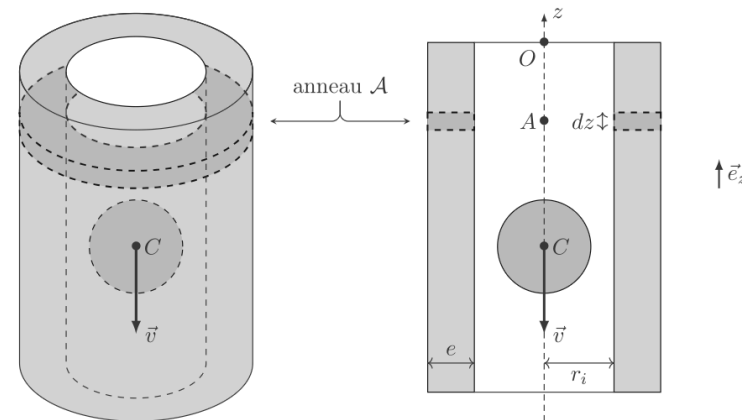


FIGURE 2 – Représentation perspective et en coupe de la chute de l'aimant (échelles non respectées)

Le mouvement de l'aimant crée un courant induit en volume dans le tube. Nous admettons que l'aimant est équivalent à un dipôle magnétique ponctuel de moment dipolaire $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ disposé en son centre C . Il descend à la vitesse $\vec{v} = -v \vec{e}_z$ avec $v > 0$. Nous admettons aussi que les courants induits sont de géométrie orthoradiale : ils tournent dans le tube autour de l'axe (Oz) de la chute.

- – 6. On étudie d'abord une partie du tube délimitée par un anneau ($\mathcal{A}$) de centre A , de hauteur dz , disposé à l'ordonnée z , compris entre les rayons r_i et $r_i + e$ (cf. figure 2) au sein du cuivre, matériau vérifiant la loi d'Ohm avec la conductivité γ .

En considérant $e \ll r_i$ (même si cette approximation n'est pas pertinente au vu des valeurs numériques), déterminer la conductance électrique dG de cet anneau en fonction de γ , e , dz et r_i .

- – 7. On admet que le flux $\Phi(t)$ du champ magnétique créé par l'aimant à travers ce même anneau ($\mathcal{A}$) s'écrit $\Phi(t) = \Phi_0 \frac{r_i^3}{(r_i^2 + (z + vt)^2)^{3/2}}$ où Φ_0 est une constante dont on admettra qu'elle s'écrit sous la forme $\Phi_0 = \mu_0^a M_0^b r_i^c$ où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. Tracer l'allure de la courbe $\Phi(t)$. Déterminer les exposants a , b et c par analyse dimensionnelle.

- – 8. On pose $x = (z + vt)/r_i$. Montrer que la puissance dissipée par effet Joule dans l'anneau ($\mathcal{A}$) s'écrit :

$$d\mathcal{P}_J = \frac{9\gamma e \mu_0^2 M_0^2}{2\pi r_i^4} \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^5} v^2$$

- – 9. Justifier que la puissance totale dissipée par effet Joule puisse être approchée par l'intégrale :

$$\mathcal{P}_J \simeq \int_{x=-\infty}^{+\infty} d\mathcal{P}_J$$

- – 10. Tous calculs faits, on obtient $\mathcal{P}_J = K M_0^2 v^2$ où $K = 2,3\text{ SI}$. En admettant la conversion totale de l'énergie mécanique en énergie électrique lors du freinage inductif, donner l'expression littérale de la force de freinage $\vec{F}$ exercée sur l'aimant pendant sa chute, en fonction de K , M_0 et $\vec{v}$.
- – 11. Le temps de chute est $\Delta t_h = 4,0\text{ s}$ pour un tube de 20 cm de haut. Quel serait le résultat de la même expérience avec un tube de même longueur en aluminium ? en acier ?
- – 12. Calculer le moment dipolaire M_0 de l'aimant utilisé.

Le matériau utilisé pour la fabrication de l'aimant est un alliage ferromagnétique caractérisé par un cycle d'hystérésis large. On rappelle ici que celui-ci trace les valeurs de l'aimantation $\mathcal{M}$ en fonction de l'excitation magnétique H appliquée.

- – 13. Faire apparaître sur votre copie l'allure d'un tel cycle en précisant les valeurs de l'aimantation rémanente $\mathcal{M}_r$, de l'aimantation à saturation $\mathcal{M}_s$ et de l'excitation coercitive H_c .
Laquelle de ces trois grandeurs pourrait être déterminée à partir de la mesure de M_0 ?

I.C Freinage ferroviaire rhéostatique

La chute de l'aimant au sein du tube métallique constitue un bon modèle des systèmes de freinage magnétique utilisés sur certains trains et tramways (cf. photographie de la figure 3, qui montre le système de bobines descendu à proximité du rail).

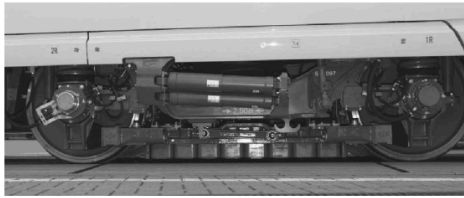


FIGURE 3 – Bobines d'un frein électromagnétique KNORR sur train de type VELARO

Le schéma simplifié de la figure 4 montre une paire de bobines du système, alimentées au moment du freinage par le courant $I > 0$. Ces bobines sont solidaires du train qui avance à la vitesse $\vec{v}$ relativement au rail (fixe). Le schéma propose aussi, seulement au voisinage des bobines, la direction (mais pas le sens) des lignes de champ magnétique créées par celles-ci dans le volume du rail.

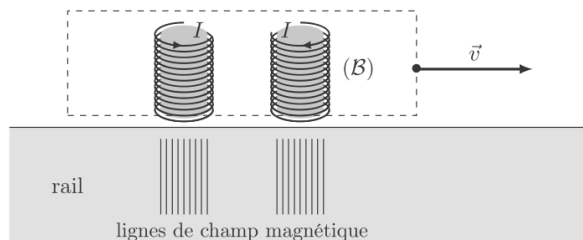


FIGURE 4 – Système de freinage ferroviaire à courants de Foucault

- – 14. Reproduire sur votre copie l'aspect général de la figure 4 en y précisant le sens du champ magnétique par l'orientation des lignes de champ ; justifier très brièvement.
- – 15. Indiquez, sur le même schéma, la direction et le sens des densités volumiques $\vec{j}$ des courants induits dans le rail à l'aplomb des deux bobines ; justifier soigneusement le sens choisi.

Données numériques et formulaire

Accélération de la pesanteur au sol	$g_0 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Conductivité électrique du cuivre	$\gamma_{\text{Cu}} = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$
Conductivité électrique de l'aluminium	$\gamma_{\text{Al}} = 3,7 \cdot 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$
Conductivité électrique de l'acier	$\gamma_a = 7,7 \cdot 10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$
Dipôle magnétique terrestre	$\mu_T = 7,7 \cdot 10^{22} \text{ A}\cdot\text{m}^2$
Durée d'un mois (moyen)	$30 \text{ j} = 2,6 \cdot 10^6 \text{ s}$
Durée d'une année	$365 \text{ j} = 3,2 \cdot 10^7 \text{ s}$
Intensité du champ magnétique terrestre aux pôles	$B_p = 60 \mu\text{T}$
Intensité du champ magnétique terrestre à l'équateur	$B_e = 30 \mu\text{T}$
Masse volumique de l'air au sol	$\rho_0 = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Masse volumique de l'aluminium	$\rho_{\text{Al}} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Rayon terrestre	$R_T = 6\,400 \text{ km}$
Viscosité dynamique de l'air	$\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Facteurs de conversion	$0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$
	$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

Champ magnétique créé par un dipôle magnétique placé à l'origine des coordonnées, de moment dipolaire $\vec{\mu} = \mu \vec{e}_z$, en un point de coordonnées sphériques r, θ, φ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta]$$

$$\ln(10) = 2,3 \quad \sqrt{60} = 7,7 \quad \sqrt{63} = 7,9 \quad \exp(18,18 \dots) = 7,9 \cdot 10^7$$

