

Partie I – Fonctionnement électrique d'un nerf

EA3 MPI 2025

Q36. Remarque : rédaction trop détaillée dans le cadre d'un concours !! il faudrait en revanche faire des schémas

On considère un point M quelconque de la membrane, repéré en coordonnées cylindriques, d'axe (Oz) l'axe du cylindre

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + E_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

Symétries de la distribution de charges :

Le plan $\pi_{s1} = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ passant par le point M et perpendiculaire à l'axe du cylindre est plan de symétrie de la distribution de charges donc, d'après le principe de Curie, du champ $\vec{E}$, or $\vec{E}$ en un point M d'un plan de symétrie appartient à ce plan de symétrie : le champ $\vec{E}$ appartient donc à π_{s1} et n'a pas de composante selon $\vec{u}_z$: $E_z = 0$.

De même, le plan $\pi_{s2} = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ passant par le point M et contenant l'axe (Oz) du cylindre est plan de symétrie de la distribution de charges donc de $\vec{E}$; le champ $\vec{E}$ appartient donc à π_{s2} et n'a pas de composante selon $\vec{u}_\theta$: $E_\theta = 0$.

Ou directement : $\vec{E}$ appartient à l'intersection des différents plans de symétrie soit ici $\vec{E}$ suivant $\vec{u}_r$:

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r = E(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

Invariances

Distribution de charges (donc E selon le principe de Curie) invariante par rotation selon θ et par translation selon z

$\Rightarrow \|\vec{E}\|$ ne dépend ni de θ ni de z .

$$\boxed{\vec{E} = E(r) \vec{u}_r}$$

Choix de la surface de Gauss :

Le champ étant radial, on choisit une surface Σ_G passant par le point M telle que les différentes surfaces aient des vecteurs surface colinéaires ou orthogonaux au champ, soit à $\vec{u}_r$: cylindre de même axe (Oz) que le cylindre, de rayon r et de hauteur h quelconque. Sa surface latérale passe par le point M ; il s'agit bien d'une surface fermée passant par le point M étudié pouvant constituer une surface de Gauss.

La surface de Gauss a une surface totale $\Sigma_G = S_{haut} + S_{bas} + S_{lat}$ avec $S_{haut} = S_{bas} = S$ surfaces des faces inférieures et supérieures et S_{lat} surface latérale du cylindre de Gauss.

Calcul du flux sortant de $\vec{E}$ à travers la surface de Gauss $\Sigma_G = S_{haut} + S_{bas} + S_{lat}$

On décompose le flux à travers la surface de Gauss fermée en une somme de flux à travers les différentes surfaces constituant la surface de Gauss fermée

$$\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot \overrightarrow{dS}(P) = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{haut}} + \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{bas}} + \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{lat}}$$

$\Phi_{haut} = \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{haut}}$: les vecteurs $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS_{haut}}$ sont orthogonaux, $\Phi_{haut} = 0$ ($\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ et $\overrightarrow{dS_{haut}}$ suivant $\vec{u}_z$: $\vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{haut}} = E(r)\vec{u}_r \cdot dS_{haut}\vec{u}_z$ avec $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = 0$ soit $\Phi_{haut} = 0$).

Idem pour Φ_{bas} : $\Phi_{bas} = \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{bas}}$: les vecteurs $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS_{bas}}$ sont orthogonaux, $\Phi_{bas} = 0$ ($\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ et $\overrightarrow{dS_{bas}}$ suivant $-\vec{u}_z$: $\vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{bas}} = E(r)\vec{u}_r \cdot dS_{bas}(-\vec{u}_z)$ avec $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = 0$ soit $\Phi_{bas} = 0$).

$$\begin{aligned} \Phi_{lat} &= \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{lat}} = \iint E(r) \vec{u}_r \cdot dS_{lat} \vec{u}_r \stackrel{\substack{\vec{E} \text{ et } \overrightarrow{dS} \\ \text{colinéaires}}}{=} \iint E(r) \cdot dS_{lat} \stackrel{\substack{E(r) \text{ constant} \\ \text{sur } S_{lat} \text{ à } r = cte}}{=} E(r) \iint dS_{lat} = E(r) \cdot S_{lat} \\ &= E(r) \cdot 2\pi r h \end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = \Phi_{lat} = E(r) \cdot 2\pi r h}$$

Calcul de la charge intérieure

Le point M se trouve à l'intérieur de la membrane avec $r \in [a, a + b]$. La charge intérieure à la surface de Gauss Q_{int} correspond donc à celle portée par la face intérieure de densité surfacique σ , soit

$$Q_{int} = \iint \sigma \, dS = \sigma S_{int} = 2\pi a h \sigma$$

Application du théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot \overrightarrow{dS}(P) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Leftrightarrow E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{2\pi a h \sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

On a donc pour tout point M à l'intérieur de la membrane soit pour $r \in [a, a + b]$: $E(r) = \frac{a\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r r}$

$$\vec{E} = \frac{a\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r r} \vec{u}_r$$

Remarque : vérification de la cohérence : expression homogène : $[E] = \frac{[q]}{[\epsilon_0]L^2}$, de sens cohérent selon le signe de σ

Q37. Par définition du potentiel électrostatique V , $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)}$ ou $\boxed{dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM}}$

Le champ $\vec{E}$ ayant une unique composante selon $\vec{u}_r$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \frac{dV}{dr} \vec{u}_r \text{ soit } \frac{a\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r r} = -\frac{dV}{dr}$$

$$\text{Ou encore : } dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM} = -\frac{a\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r r} dr$$

En intégrant entre le point A tel que $r = a$ (face intérieure de la membrane) et le point M quelconque étudié :

$$\int_{V(A)}^{V(M)} dV = - \int_A^M \vec{E} \cdot d\vec{OM} = - \int_a^r \frac{a\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r r'} dr'$$

Soit

$$\boxed{V(M) = V(A) - \frac{a\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \ln\left(\frac{r}{a}\right)}$$

En se plaçant en M = E tel que $r = a + b$ au niveau de la face extérieure de la membrane :

$$V(E) = V(A) - \frac{a\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

D'où

$$\boxed{\sigma = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r (V(A) - V(E))}{a \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)}}$$

Q38. Avec $a \gg b, \frac{b}{a} \ll 1$. Avec un D.L. à l'ordre 1 : $\ln\left(\frac{a+b}{a}\right) = \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) = \frac{b}{a} + o\left(\frac{b}{a}\right)$ soit

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r (V(A) - V(E))}{a \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)} \approx \frac{\epsilon_0 \epsilon_r (V(A) - V(E))}{a \frac{b}{a}}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r (V(A) - V(E))}{b}}$$

On a donc

$$\|\vec{E}\|(r) = \left| \frac{a\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r r} \right| \approx \left| \frac{a}{\epsilon_0 \epsilon_r r} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r (V(A) - V(E))}{b} \right| = \left| \frac{a}{r} \frac{(V(A) - V(E))}{b} \right|$$

$$\text{On a donc } \|\vec{E}\|(a) = \left| \frac{(V(A) - V(E))}{b} \right| \text{ et } \|\vec{E}\|(v) = \left| \frac{a}{a+b} \frac{(V(A) - V(E))}{b} \right| \approx \left| \frac{(V(A) - V(E))}{b} \right| \approx \|\vec{E}\|(a)$$

$\forall M$ à l'intérieur de la membrane soit $\forall M$ tq $r \in [a, a + b]$, on a donc à l'ordre 1 :

$$\boxed{\|\vec{E}(M)\| \approx \|\vec{E}\|(a) = \left| \frac{(V(A) - V(E))}{b} \right|}$$

Charge Q portée par une longueur L de membrane :

$$\boxed{Q = \iint \sigma \, dS = 2\pi a L \sigma = 2\pi a L \frac{\epsilon_0 \epsilon_r (V(A) - V(E))}{b}}$$

Q39. Par définition de la capacité d'un condensateur (dommage de donner l'expression qui est un résultat de cours très classique !!) :

$$Q = C(V(A) - V(E))$$

Soit pour une longueur L de membrane :

$$Q = 2\pi a L \sigma = 2\pi a L \frac{\epsilon_0 \epsilon_r (V(A) - V(E))}{b} = C(V(A) - V(E))$$

Par identification, pour une longueur L de membrane :

$$\boxed{C = 2\pi a L \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{b}}$$

Pour une longueur L de membrane, on a une surface latérale de membrane $S = 2\pi a L$

Capacité par unité de surface de membrane :

$$\boxed{C_m = \frac{C}{S} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{b}}$$

$$\text{A.N. : } C_m = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \times 8,0}{7,0 \cdot 10^{-9}} = \mathbf{1,0 \cdot 10^{-2} \, F \cdot m^{-2}}$$

Cette valeur est bien compatible avec celle fournie par la littérature médicale.

$$\text{On a montré } \sigma = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r (V(A) - V(E))}{b} \text{ soit } \boxed{\sigma = C_m (V(A) - V(E))}$$

$$\text{A.N. : } \sigma = \mathbf{-6,1 \cdot 10^{-4} \, C \cdot m^{-2}}$$

De plus, $\|\vec{E}(M)\| \approx \|\vec{E}\|(a) = \left| \frac{(V(A) - V(E))}{b} \right|$ avec $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ dirigé dans le sens des potentiels décroissants, or ici, $V(A) - V(E) < 0$ soit $V(A) < V(E)$: $\vec{E}$ dirigé de E vers A soit **selon** $-\vec{u}_r$,

$$\text{A.N. : } \|\vec{E}(M)\| = \mathbf{8,6 \cdot 10^6 \, V \cdot m^{-1}}$$

Partie II – Excitation magnétique d'un diapason

E3A MP 2022

10. Plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie pour la distribution de courant donc $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{u}_z$. Invariance de la distribution de courant par toute modification de θ et z donc $B(r)$.

11. Utiliser le théorème d'Ampère sur un rectangle inclus dans le solénoïde dont deux côtés sont parallèles à Oz (démonstration du cours). Puis prendre un rectangle similaire à cheval entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde pour aboutir à $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$.

12. $B \simeq 10^{-6} \times 10^3 \times 0,1 = 0,1 \text{ mT}$ ce qui est proche de la valeur du champ magnétique terrestre au sol.

13. On néglige les effets de bord, ce qui permet d'exploiter l'invariance par toute modification de z et de traiter $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ comme un plan de symétrie quelle que soit la position du point M (cf question 10). Cela permet finalement de tirer profit du théorème d'Ampère. Cette approximation est valide en des points M distants des « faces d'entrée » et de « sortie » (ouvertures perpendiculaires à l'axe Oz) du solénoïde de plus qu'environ une fois le rayon du solénoïde.

14. Maxwell-Thomson (ou Maxwell-« flux ») : $\text{div} \vec{B} = 0$;
Maxwell-Gauss : $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ ($\rho(M, t)$ densité volumique de charge);
Maxwell-Faraday : $\text{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$;
Maxwell-Ampère : $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$ ($\vec{j}(M, t)$ densité de courant volumique).

15. D'après MF, $\partial_t \vec{B}$ joue le même rôle pour $\vec{E}$ que $\vec{j}$ pour $\vec{B}$ dans MA. Comme le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie pour $\vec{B}$ alors $\vec{E}(M, t)$ est normal à ce plan, donc

$$\vec{E}(M, t) = E(r, \theta, z, t) \vec{u}_\theta$$

On a encore invariance de $B(r, t)$ par toute modification de θ et z donc $E(r, t)$.

16. Appliquons la formule de Stokes à MF (ou directement la loi de Faraday) en prenant comme contour le cercle passant par M (situé à l'intérieur du solénoïde), orthogonal à l'axe Oz orienté de sorte que son vecteur surface soit selon $+\vec{u}_z$. Il vient :

$$2\pi r E(r, t) = \pi r^2 \mu_0 n \omega I \sin \omega t \quad \text{d'où} \quad \mathbf{E_0(r)} = \frac{r}{2} \mu_0 n \omega \mathbf{I} = \mathbf{B_0 \omega \frac{r}{2}}$$

On peut aussi utiliser directement le formulaire donnant le rotationnel avec MF.

17. Matériau à l'intérieur duquel le **champ électrique est nul à toute fréquence**. Autre alternative : c'est un **milieu ohmique à la limite $\gamma \rightarrow \infty$** .

18. En un point M de l'interface, la relation de passage s'écrit :

$$\vec{E}_{\text{vide}}(M, t) = -\frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

donc $\vec{u}_\theta \cdot \vec{E}_{\text{vide}}(M, t) = 0$ pour tout t . Si seul $\vec{E}_i$ était présent, alors pour tout t , $\frac{E_0(r)}{2} \sin \omega t = 0$, ce qui imposerait $E_0(r) = 0$ (donc partout dans le domaine vide, puisque E_0 est indépendant de z). L'existence d'un champ $\vec{E}_i \neq \vec{0}$ requiert l'existence d'un champ réfléchi.

19. En un point M de l'interface vide-conducteur parfait,

$$\vec{0} = [\vec{E}_r(M, t) + \vec{E}_i(M, t)] = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

Pour un champ électrique incident $\vec{E}_i$ tangentiel à l'interface, le champ réfléchi $\vec{E}_r$ est également tangentiel à l'interface, d'où $\sigma(M, t) = 0$ et

$$\vec{E}_r = -\frac{E_0(r)}{2} \sin \omega t \vec{u}_\theta$$

D'après MF, $\frac{1}{2} \left(E'_0(r) + \frac{E_0(r)}{r} \right) \sin \omega t \vec{u}_z = \frac{B_0}{2} \omega \sin \omega t \vec{u}_z = \partial_t \vec{B}_r$ (en utilisant l'expression de $E_0(r)$ établie à la question 16) d'où

$$\vec{B}_r(M, t) = -\vec{B}_i(M, t)$$

où l'on a pris la constante d'intégration nulle en l'absence de source de champ magnétostatique. Si bien qu'en tout point M dans l'air au voisinage de l'axe Oz,

$$\vec{E}(M, t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \vec{0}$$

20. Remarquons que $|z|/R \simeq R/L \simeq 10^{-1}$ et $|z|/L \simeq 10^{-2}$. On réécrit $b(z)$ sous la forme

$$b(z) = B_0 \left[\frac{1 + z/L}{\sqrt{(1 + z/L)^2 + (R/L)^2}} - \frac{z/R}{\sqrt{1 + (z/R)^2}} \right]$$

soit

$$b(z) = B_0 \left[(1 + o(10^{-1})) [1 + o(10^{-1})] - \frac{z}{R} [1 + o(10^{-1})] \right]$$

À l'ordre 1 en z/R et $R/L \simeq 10^{-1}$, $b(z) \simeq B_0 \left[1 - \frac{z}{R} \right]$ d'où $\mathbf{a = -1}$.

En se limitant à l'ordre 0 en R/L et z/R , $b(z) = B_0 = 0$. Cela explique pourquoi **l'expression proposée en début de partie III n'est pas satisfaisante**.

21. Avec $\vec{\mathcal{M}} = d\vec{\mu}$,

$$dF_m = \chi B_0^2 \left(1 + a \frac{z}{R} \right) \frac{a}{R} \cos^2 \omega t \vec{u}_z dV \simeq \chi B_0^2 \frac{a}{R} \cos^2 \omega t dV \vec{u}_z$$

d'où

$$\alpha = -\chi B_0^2 \frac{a}{R} = \frac{\chi B_0^2}{R}$$

La force est dirigée vers $-\vec{u}_z$, c'est-à-dire dans le sens $b(z)$ croissant (donc vers la zone de champ fort).

22. Comme $\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}$, le **forçage est à la pulsation 2ω** . Il faut donc exciter près de la fréquence **128 Hz** pour étudier la résonance d'un diapason qui résonne à 256 Hz.

Partie III – Transmission sans fil

E3A PSI 2020 Modélisation

A7. Le plan $z = 0$ est un **plan de symétrie des courants**, et donc un **plan d'antisymétrie du champ magnétique**. Cette propriété se traduit par $B_z(-z) = B_z(z), \forall z$.

A8. Le champ magnétique est maximal en $z = 0$ et vaut

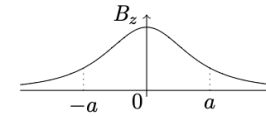
$$B_{z, \max} = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a}$$

Par définition de $z_{1/2}$, $B_z(z_{1/2}) = B_{z, \max}/2$. Il vient

$$\frac{a^2}{2(z_{1/2}^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{4a}$$

$$2a^3 = (z_{1/2}^2 + a^2)^{3/2}$$

$$z_{1/2} = a\sqrt{2^{2/3} - 1} \approx 0,77 a$$



A9. Étudions la carte de champ du solénoïde.

- Le plan Π , passant par l'axe vertical de la carte de champ et perpendiculaire à celle-ci, est un plan d'antisymétrie des courants. Ce plan est donc un plan de symétrie du champ magnétique. Pour tout couple de points (L,M) symétriques par rapport à Π , on remarque en effet que

$$\vec{B}(M) = \text{sym}_{\Pi}[\vec{B}(L)]$$

- Le plan Π^* , passant par l'axe horizontal de la carte de champ et perpendiculaire à cette dernière, est un plan de symétrie des courants, soit également un plan d'antisymétrie du champ magnétique. Pour tout couple de points (L,N) symétriques par rapport à Π^* , on note effectivement que

$$\vec{B}(N) = -\text{sym}_{\Pi^*}[\vec{B}(L)]$$

On retrouve les mêmes éléments de symétrie sur la carte de champ de la bobine plate.

A10. Les lignes de champ se resserrent aux endroits où **le champ magnétique est plus intense**. Elles sont parallèles aux endroits où **le champ magnétique est uniforme**. Ces propriétés viennent de l'équation locale $\text{div } \vec{B} = 0$: **le champ magnétique est à flux conservatif**.

Partie B / Transfert de puissance : rendement de Yates

B1. Par définition,

$$P_{\text{reçue}} = (u_{R_1} + u_{L_1})i = R_1 i^2 + L_1 i \frac{di}{dt}$$

L'intensité varie en $\cos(\omega t)$; en utilisant les résultats usuels

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = \left\langle \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right\rangle = 0$$

$$\langle P_{\text{reçue}} \rangle = \frac{R_1 I_0^2}{2}$$

B2. On utilise l'expression du champ magnétique donnée par l'énoncé, en $z = d$, supposé uniforme au niveau de la bobine réceptrice :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 N_1 i(t) a^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} N_2 S_2 = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 i(t) a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}}$$

B3. Il s'agit du phénomène d'**induction électromagnétique**, découlant de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

B4. On calcule la fem en utilisant la **loi de Faraday** :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \omega I_0 \sin(\omega t)$$

B5. L'inductance propre de la bobine réceptrice étant négligée, cette dernière est parcourue par un courant $i_2 = e/R_2$. De fait,

$$P_{\text{gén}} = e i_2 = \frac{e^2}{R_2} = \frac{1}{R_2} \left[\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \omega I_0 \sin(\omega t) \right]^2$$

Puisque $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2$,

$$\langle P_{\text{gén}} \rangle = \frac{1}{2R_2} \left[\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \omega I_0 \right]^2$$

B6. En utilisant les résultats précédents,

$$\eta = \frac{1}{2R_2} \left[\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \omega I_0 \right]^2 \frac{2}{R_1 I_0^2}$$

$$\eta = k \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4 \omega^2}{R_1 R_2 (d^2 + a^2)^3} \quad \text{avec} \quad k = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2$$

Partie C / Modélisation du couplage : inductance mutuelle

C1. Le flux magnétique créé par un circuit 1, parcouru par un courant i_1 , à travers un circuit 2, s'écrit

$$\Phi_{12} = M i_1 \quad (\text{ou } \Phi_{21} = M i_2)$$

M est en **Henry**.

C2. La loi des mailles dans le circuit 1 s'exprime

$$E = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

De même, la loi des mailles dans le circuit 2 s'exprime

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

C3. On multiplie la première loi des mailles par i_1 , la seconde par i_2 :

$$E i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad 0 = R_2 i_2^2 + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}$$

En sommant ces deux équations, on obtient

$$E i_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Ce bilan montre que la puissance fournie par le générateur, $E i_1$, est en partie **dissipée par effet Joule dans les résistances**, en partie **stockée sous forme magnétique dans les bobines**.

C4. En reprenant l'expression de $\mathcal{E}_{\text{mag}}$,

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} i_2^2 \left[L_1 \left(\frac{i_1}{i_2} \right)^2 + L_2 + 2M \left(\frac{i_1}{i_2} \right) \right]$$

Avec $x = i_1/i_2$,

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} i_2^2 P(x) \quad \text{avec} \quad P(x) = L_1 x^2 + 2M x + L_2$$

C5. Puisque $\mathcal{E}_{\text{mag}} \geq 0$, $P(x) \geq 0$. Graphiquement, la fonction $x \rightarrow P(x)$ est une parabole tournée vers le haut. Pour assurer que cette fonction soit positive pour tout x , il faut que le discriminant de $P(x)$ soit négatif ou nul :

$$\Delta = (2M)^2 - 4L_1 L_2 \leq 0$$

Il vient $M \leq \sqrt{L_1 L_2} = M_{\text{max}}$.

C6. On peut par exemple citer :

- les transformateurs, permettant d'élever ou d'abaisser la tension dans les lignes électriques ;
- les moteurs électriques, comportant un circuit primaire fixe et un circuit secondaire mobile ;
- les alternateurs, fonctionnant dans le sens contraire des moteurs ;
- le chauffage par induction (four, plaque) ;
- la détection à boucle inductive (détecteur de métaux, de véhicules) ;
- la transmission d'informations par radio-identification (RFID), mise en œuvre par exemple dans les portiques de sécurité...

Partie D / Résultats expérimentaux

D1. En observant la figure 9, on trouve $\eta_{\text{max}} = 7,5 \cdot 10^{-2}$ et $f_{\text{max}} = 15 \text{ kHz}$.

D2. Puisque $\omega = 2\pi f$, la loi de Yates prédit une **variation quadratique du rendement avec la fréquence**. Aux basses fréquences, η croît avec f (cette variation semble plutôt linéaire) ; aux hautes fréquences, η décroît avec f , **en désaccord avec la loi de Yates**.

D3. D'après le cours, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

D4. Avec la question précédente, $\omega_{\text{max}} = 2\pi f_{\text{max}} = 1/\sqrt{LC_p}$. D'où

$$C_p = \frac{1}{L(2\pi f_{\text{max}})^2} = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ F}$$

D5. Si on écarte la bobine 2 sur le côté, **les lignes de champ s'inclinent par rapport au plan de ses spires**. De fait, **le flux magnétique** $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ **diminue**, de même que η . En observant la carte de champ de la figure 5, **cet effet est d'autant plus marqué que d est petit**.

D6. Cette fois, le rendement diminue beaucoup moins sur les côtés. En tournant la bobine 2, **celle-ci reste approximativement alignée avec les lignes de champ : le flux magnétique Φ varie donc très peu**, de même que η , contrairement à la question précédente.

