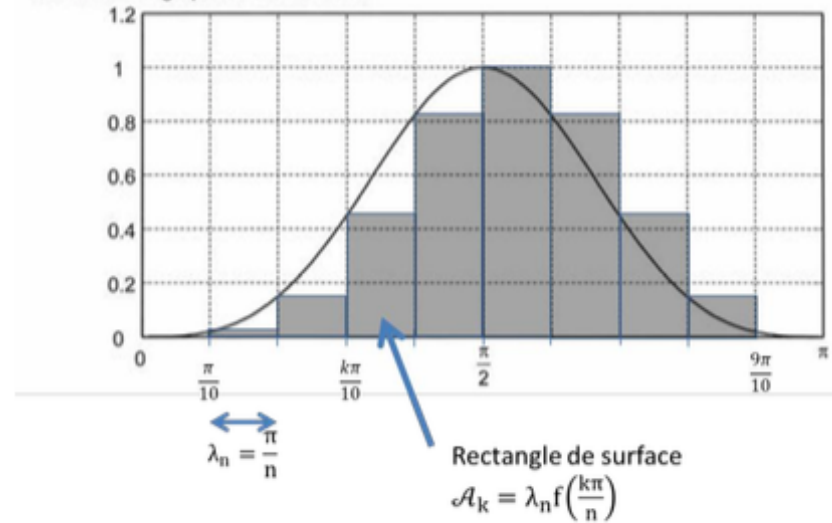


F1. Illustrer le principe de la méthode des rectangles en représentant R_{10} sur le graphe de la fonction f fourni en annexe. Donner l'expression de λ_n en fonction de n .

Question F1 : graphe de la fonction f .



R_{10} est l'aire grisée sous les rectangles. En effet :

$$R_{10} = \sum_{k=1}^9 \mathcal{A}_k = \lambda_n \sum_{k=1}^9 f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

On a :

$$\lambda_n = \frac{\pi}{n}$$

F2. Écrire une fonction $f(x)$ qui retourne la valeur de f pour un nombre réel x de $]0, \pi[$.



```
def f(x):
    return (cos(pi/2*cos(x)))*2/sin(x)
```

F3. Écrire une fonction `Rectangle1(n)` qui, pour un nombre entier $n \geq 1$, retourne la valeur de R_n .



```
def Rectangle1(n):
    Rn=0
    lambdan=pi/n
    for k in range(1,n):
        Rn=Rn+lambdan*f(k*pi/n)
    return Rn
```

F4. Combien d'évaluations de l'application f nécessite cet algorithme pour une valeur de n donnée ?

f est évaluée autant de fois que le nombre d'éléments dans `range(1,n)` soit :
 $n-1$ fois

F5. Écrire une fonction `Integrale1(eps)` qui calcule, pour $\text{eps} > 0$, les termes successifs de la suite $(R_n)_{n \geq 1}$ jusqu'à ce qu'on obtienne $|R_n - R_{n-1}| < \text{eps}$, puis qui retourne la dernière valeur R_n calculée.



```
def Integrale1(eps):
    n=2
    u=Rectangle1(n-1)
    v=Rectangle1(n)
    while abs(v-u)>eps:
        n=n+1
        u=v
        v=Rectangle1(n)
    return v
```

F6. Pour $\text{eps} = 10^{-7}$, `Integrale1(eps)` s'arrête pour $n=34$. Vérifier que cela a nécessité plus de 500 évaluations de la fonction f .

Dans la fonction précédente, la fonction `Rectangle1(n)` a été appelée une fois pour chaque n allant de 1 à 34.

Nombre d'évaluations de f =

$$\sum_{n=1}^{34} \text{nb d'appel dans Rectangle1}(n) = \sum_{n=1}^{34} (n-1) = \sum_{1}^{33} n = \frac{33 \times 34}{2} = 561 > 500$$

F7. Quelle contrainte informatique empêche d'obtenir un résultat pertinent pour des valeurs arbitrairement petites de eps ?

De même que pour la question E3, les calculs n'ont d'intérêt que lorsque eps est plus grand que la limite de l'écart relatif entre deux nombres R_n consécutif : $2^{-(52+N)}$ où N est l'exposant de R_n dans son écriture à virgule flottante.

F8. Écrire la relation de récurrence pour un entier n de la forme $n = 2^{m-1}$. Écrire une fonction récursive `Rectangle2(m)` qui pour un nombre entier m retourne la valeur de R_{2^m} .

Si $n = 2^{m-1}$, alors :

$$R_{2^m} = \frac{R_{2^{m-1}}}{2} + \frac{\pi}{2^m} \sum_{k=1}^{2^{m-1}} f\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{2^{m-1}}\right)$$



```
def Rectangle2(m):
    if m==0:
        return 0
    else:
        s=0
        for k in range(1,2**(m-1)+1):
            s=s+f(((k-0.5)*pi)/2**(m-1))
        return 0.5*Rectangle2(m-1)+s*pi/(2**m)
```

F9. Combien d'évaluations de la fonction f nécessite cet algorithme pour une valeur de m donnée ?

Pour l'indice m , f est appelée :

2^{m-1} fois dans la somme + le nombre d'appel à l'indice $m-1$

Le nombre d'appel est donc :

$$\sum_{k=1}^m 2^{k-1} = \sum_{k'=0}^{m-1} 2^{k'} = 2^m - 1 (= 2n - 1)$$

F10. Écrire une fonction `Integrale2(eps)` qui calcule, pour $\text{eps} > 0$, les termes successifs de la suite $(R_{2^m})_{m \geq 0}$ jusqu'à ce qu'on obtienne $|R_{2^m} - R_{2^{m-1}}| < \text{eps}$, puis qui retourne la dernière valeur R_{2^m} calculée. Cet algorithme doit impérativement être élaboré dans le but de minimiser le nombre total d'évaluations de f .



```
def Integrale2(eps):
    m=1
    u=Rectangle2(m-1)
    v=Rectangle2(m)
    while abs(v-u)>eps:
        m=m+1
```

```

u=v
v=Rectangle2(m)
return m

```

F11. Pour $\text{eps}=10^{-7}$, **Integrale2(eps)** s'arrête pour $m=7$. Combien d'évaluations fonction f ont été nécessaires ?

Nombre d'appel =

$$\sum_{m=0}^7 \text{nombre d'appel dans Rectangle2}(m) = \sum_{m=0}^7 (2^m - 1) = \frac{1 - 2^8}{1 - 2} - 8 = 248$$

On a bien réduit ainsi le nombre d'appel de la fonction f .

G1. Proposer une façon d'estimer, à partir des données disponibles, la valeur moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle$ du vecteur de Poynting dû à l'antenne en un point M du maillage.

Etape 1 :

On calcule au point M :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} E_y B_z - E_z B_y \\ E_z B_x - E_x B_z \\ E_x B_y - E_y B_x \end{pmatrix}$$

Etape 2 :

On moyenne les coordonnées du vecteur précédent sur une période de l'expérience en appliquant la formule suivant à chaque composante

$$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \frac{1}{100} \sum_{p=0}^{99} \vec{\Pi}\left(M, \frac{p}{100f}\right)$$

G2. On souhaite maintenant estimer la puissance moyenne rayonnée par l'antenne à travers une surface fermée contenant l'antenne. Compte tenu des données disponibles, quelle est parmi les surfaces suivantes la plus pertinente pour obtenir une estimation précise de P_a

(et donc de R_a) : la surface du cube $\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]^3$, celle du cube $[-5, 5]^3$, la sphère de centre

O et de rayon $\frac{1}{10}$ ou la sphère de centre O et de rayon 5 ?

Le maillage étant cartésien par pas de 0.1m suivant x , y et z , il convient de choisir une surface fermée cubique plutôt que sphérique pour permettre le calcul du flux du vecteur de Poynting.

De plus, pour calculer la puissance rayonnée par l'antenne, il faut intégrer le vecteur de Poynting sur une surface choisie qui englobe l'antenne, de dimension

inférieure à 16cm. Enfin, afin de minimiser l'erreur due à l'approximation de l'intégrale par une somme, on a intérêt à ce qu'une surface élémentaire discrétisée (d'aire h^2 , avec $h = 0.1\text{m}$ le pas de discrétisation) soit petite devant la surface d'intégration.

⇒ On choisit alors le cube $[-5; 5]^3$ pour réaliser le calcul intégral.

G3. Notons $(\langle \Pi_x(M, t) \rangle, \langle \Pi_y(M, t) \rangle, \langle \Pi_z(M, t) \rangle)$ les coordonnées de la valeur moyenne du vecteur de Poynting en un point M du maillage. Proposer une formule permettant d'estimer numériquement la résistance de rayonnement R_a .

$$R_a = \frac{P_a}{(1A)^2} = \iint_{\text{Surface extérieure du cube } [-5, 5]^3} \langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle \cdot d\vec{S}$$

$$= - \sum_{j=-50}^{49} \sum_{k=-50}^{49} \frac{\Pi_x(-50, j, k)}{100} + \sum_{j=-50}^{49} \sum_{k=-50}^{49} \frac{\Pi_x(50, j, k)}{100}$$

$$- \sum_{i=-50}^{49} \sum_{k=-50}^{49} \frac{\Pi_y(i, -50, k)}{100} + \sum_{i=-50}^{49} \sum_{k=-50}^{49} \frac{\Pi_y(i, 50, k)}{100}$$

$$- \sum_{i=-50}^{49} \sum_{j=-50}^{49} \frac{\Pi_z(i, j, -50)}{100} + \sum_{i=-50}^{49} \sum_{j=-50}^{49} \frac{\Pi_z(i, j, 50)}{100}$$

G4. Proposer une démarche, qui en faisant varier la surface choisie, permettrait de s'assurer une bonne précision de la valeur estimée de R_a .

Le calcul précédent a été effectué sur une surface cubique dont l'arête est de 10m, constituée de $2n=100$ pas de calculs h ($h = 0.1\text{m}$).

On peut implémenter le calcul précédent dans une fonction **Resistance(n)** qui calcule R_a en intégrant le vecteur $\vec{\Pi}$ sur la surface cubique $\left[-\frac{n}{10}, \frac{n}{10}\right]^3$.

On cherche ensuite, à l'aide d'une boucle while par exemple, la valeur minimale de n telle que $|\text{Resistance}(n) - \text{Resistance}(n-1)| < \text{eps}$ où eps est choisi suffisamment petit en fonction de la précision désirée.

CCINP 2023 PSI – Modélisation et ingénierie numérique

Calcul numérique d'intégrale

I.1 - Modélisation d'un cœur sain

Q1 Le cœur est une pompe. Lors de l'étape CD, les explications indiquent que, à pression la plus élevée, le sang est évacué vers l'aorte (le volume diminue). Cela correspond bien au sens direct sur le diagramme $p(V)$.

$W_p = -\oint_{\Gamma_{th}} p dV$ représente le travail algébrique reçu par le sang lors d'un cycle. Il est positif pour une pompe.

NB : p est une surpression. La pression est $P = P_0 + p$, et $\oint_{\Gamma_{th}} P_0 dV = P_0 \oint_{\Gamma_{th}} dV = 0$.

Q2 On suppose l'évolution de la pression connue pendant un cycle, ce qui physiquement est loin d'être évident !

Schéma numérique dans chacun des trois cas :

$W_{n-1} - W_n = p_{n-1} (V_n - V_{n-1})$ pour la méthode des rectangles à gauche

$W_{n-1} - W_n = p_n (V_n - V_{n-1})$ pour la méthode des rectangles à droite

$W_{n-1} - W_n = \frac{p_{n-1} + p_n}{2} (V_n - V_{n-1})$ pour la méthode des trapèzes

Il me semble que les noms des schémas Euler explicite et implicite sont liés à l'évaluation de solutions d'équations différentielles et non d'intégrales. Il n'y a ici rien d'implicite.

Q3 Si on approxime l'aire par celle d'un rectangle de hauteur $P_1 - P_0 = 0,7 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ et de largeur $V_1 - V_0 = 70 \text{ mL} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$, on obtient $W_p = 49 \cdot 10^{-2} \text{ J} \approx 0,5 \text{ J}$.

Conformément à la réponse de la Q1, c'est une aire et un travail positifs.

Q4 La partie droite du cœur fournit le même travail, soit au total 1 J par battement.

A raison de 60 battements par minute, soit 1 par seconde, cela correspond à une puissance transférée au sang de $P_{\text{Coeur}} = 1 \text{ W}$.

Q5 Avec un rendement $\eta = 20\% = 0,20$, la puissance consommée par le muscle est

$$P_{\text{Consommée}} = P_{\text{Coeur}} / \eta = 5 \text{ W}.$$

L'énergie pour un battement est donc 5 J , soit une énergie consommée par jour $5 \times 3600 \times 24 \text{ J} = 5 \times 24 = 120 \text{ Wh}$.

Cela fait une fraction $x = \frac{120}{2400} = 0,05 = 5\%$ de l'apport journalier.

CCINP 2024 PSI – Modélisation et ingénierie numérique

Développement en série de Fourier

I.2. Spectre en courant de ligne

Q3. Code complété pour calculer la FFT et afficher la figure 3.

	Programme Python
1	# Fréquence d'échantillonnage
2	$Fe = 50e3$
3	# Nombre d'échantillons
4	$N = \text{len}(\text{courant})$
5	# Calcul de la transformée de Fourier discrète
6	$\text{fft_courant} = \text{np.fft.rfft}(\text{courant}) * 2 / N$
7	# Module de la transformée de Fourier discrète
8	$\text{mod_fft_courant} = \text{np.abs}(\text{fft_courant})$
9	# Vecteur fréquence
10	$\text{freq} = \text{np.array}([n * Fe / N \text{ for } n \text{ in range}(N // 2)])$ " d'après la documentation
11	
12	# Tracé du spectre
13	$\text{plt.figure}(1, \text{figsize}=(8,6))$
14	$\text{plt.plot}(\text{freq}, \text{mod_fft_courant}, \text{color}='gray', \text{linewidth}=2)$
15	$\text{plt.xlim}(0, 700)$ # valeurs de la figure 3
16	$\text{plt.xlabel}(\text{"Fréquence (Hz)"}, \text{fontsize}=16)$
17	$\text{plt.ylim}(0.0, 3.5)$
18	$\text{plt.ylabel}(\text{"Courant (A)"}, \text{fontsize}=16)$
19	$\text{plt.tick_params}(\text{axis}='both', \text{labelsize}=16)$
20	$\text{plt.grid}()$
21	$\text{plt.show}()$

Q4. On relève sur la figure 3 les amplitudes des harmoniques impairs :

Fréquence (Hz)	Amplitude $\hat{I}_n$ (A)
50	3,0
150	1,3
250	0,55
350	0,45
450	0,3
550	0,1
650	0,1

Les harmoniques pairs sont nuls.

Q5. Il s'agit ici de considérations mathématiques.

La décomposition en série de Fourier est unique, et doit vérifier $i(t - T/2) = -i(t)$

Or $\cos(2\pi n f(t - T/2) + \varphi_n) = -\cos(2\pi n f t + \varphi_n)$ pour n impair

et $\cos(2\pi n f(t - T/2) + \varphi_n) = +\cos(2\pi n f t + \varphi_n)$ pour n pair, car $2\pi n f T/2 = \pi n$.

On a donc $i(t - T/2) + i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \hat{I}_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) = 0$,

$$i(t - T/2) + i(t) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \hat{I}_{2p} \cos(2\pi 2p f t + \varphi_{2p}) = 0 \quad \forall t$$

Pour avoir $i(t - T/2) = -i(t)$, il faut donc $\hat{I}_n = 0$ pour n pair (famille libre des fonctions)

On peut aussi conclure en multipliant par $\cos(2\pi 2p f t + \varphi_{2p})$ et en prenant la moyenne :

$$\langle (i(t - T/2) + i(t)) \cos(2\pi 2p f t + \varphi_{2p}) \rangle = \hat{I}_{2p}^2 = 0 \quad \text{pour tout } p.$$

I.3. Puissance moyenne fournie par le réseau

Q6. Par définition, et en remplaçant l'expression de la tension et de l'intensité

$$P = \langle v(t).i(t) \rangle = \left\langle \hat{V} \cos(2\pi f t) \sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{V} \hat{I}_n \langle \cos(2\pi f t) \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \rangle$$

$$\text{Or } \langle \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t + \varphi_n) \rangle = 0 \quad \text{si } f_1 \neq f_2.$$

$$\text{Donc } \langle \cos(2\pi f t) \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \rangle = 0 \quad \text{pour } n \neq 1.$$

$$\text{Il reste } P = \hat{V} \hat{I}_1 \langle \cos(2\pi f t) \cos(2\pi f t + \varphi_1) \rangle = \frac{1}{2} \hat{V} \hat{I}_1 \cos \varphi_1 \quad \text{après linéarisation.}$$

Q7. En supposant $\varphi_1 = 0$, $P = \frac{1}{2} \hat{V} \hat{I}_1$ avec $\hat{V} = 325 \text{ V}$ et $\hat{I}_1 = 3,0 \text{ A}$.

A.N. $P = 0,49 \text{ kW}$.

CCINP 2021 PSI

IV. Influence du débit d'air conditionné sur la température

IV.1 Schéma électrique équivalent de la pièce

17. Exprimer R_4 en fonction des résistances thermiques de l'échangeur et de la fenêtre. Justifier.

Réponse :

L'échangeur et la fenêtre sont soumis à la même différence de température $T_e - T$, ils sont donc en parallèle, les conductances thermiques s'ajoutent.

18. À quoi correspond la source de courant η ? Justifier.

Réponse :

Il s'agit de la puissance thermique fournie à la pièce par les 4 personnes.

19. Donner l'expression de la résistance R_3 .

Réponse :

On a d'après (2), $\mathcal{P}_{dim} = D_m c_p (T - T_c)$, d'où l'expression de la résistance thermique $R_3 = \frac{1}{D_m c_p}$. Cette résistance varie lorsque le débit varie.

20. En appliquant la loi des noeuds aux points 1,2 et 3, établir trois équations faisant intervenir T_1 , T_2 , T et leurs dérivées.

Réponse :

Les loi des noeuds aux point 1,2 et 3 donnent respectivement

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = \frac{T_e - T_1}{R_1} + \frac{T_3 - T_1}{R_1}$$

$$C_3 \frac{dT}{dt} = \eta + \frac{T_e - T}{R_4} + \frac{T_2 - T}{R_2} + \frac{T_c - T}{R_3} + \frac{T_1 - T}{R_1}$$

$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = \frac{T_3 - T_2}{R_2}$$

21. Montrer que la modélisation adoptée conduit à l'équation différentielle matricielle $X = AX + BU$, avec

$$X = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} T_e \\ T_c \\ \eta \end{pmatrix}. \quad \text{On explicitera avec soin les matrices } A \text{ et } B.$$

Réponse :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{R_1 C_1} & 0 & \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{R_2 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_3} & \frac{1}{R_2 C_3} & -\frac{1}{C_3} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_4 C_3} & \frac{1}{R_3 C_3} & \frac{1}{C_3} \end{pmatrix}$$

IV.2 Résolution numérique

22. Compléter la ligne 7 du programme fourni, en définissant le vecteur U .

Réponse :

```
U = np.array([28,20,500])
```

23. On souhaite initialiser les températures T_1 , T_2 et T à 28 degrés. Compléter la ligne 10 initialisant le vecteur X .

Réponse :

```
X = np.array([28,28,28])
```

24. Approcher $X(t_{k+1})$ à l'aide de $X(t_k)$, $\dot{X}(t_k)$ et Δt en utilisant la méthode d'Euler. À quelle condition cette approximation est-elle justifiée ?

Réponse :

$X(t_{k+1}) - X(t_k) = AX(t_k) + BU$. Cette approximation est justifiée si Δt est suffisamment faible devant le temps caractéristique de variation de la température.

25. Compléter les lignes 21 à 23. Les éléments des listes "temps" (t) et "température" (T) devront respectivement correspondre à des minutes et des degrés Celcius.

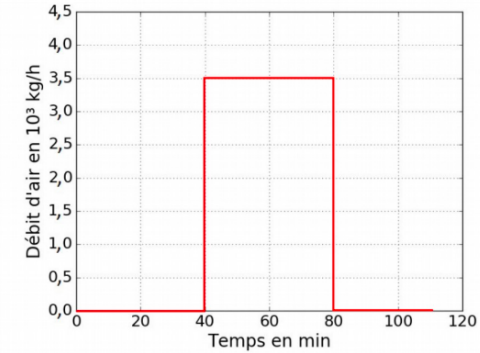
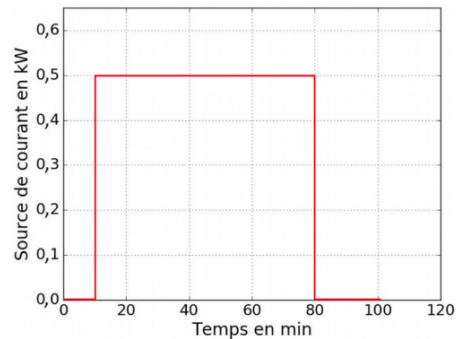
Réponse :

```
t.append(i*Δt)
X = X + np.dot(A,X) + np.dot(B,U)
T.append(X[2])
```

IV.3 Résultat de simulation et identification à un premier ordre

26. Représenter graphiquement les évolutions temporelles de la source de courant η et du débit massique d'air conditionné D_m sur le document réponse.

Réponse :



27. Justifier qu'un modèle de comportement type passe-bas du premier ordre semble approprié.

Réponse :

La réponse du système à une échelon a une allure exponentielle, il n'y a pas de dépassement, un modèle d'ordre 1 semble convenir.

28. Identifier le gain statique H_0 et la constante de temps τ du modèle.

Réponse :

Lorsque le régime permanent est atteint, on a $H_0 = \Delta T / D_m = (29,2 - 22,7) / (3,5 / 3,6) = 6,7 \text{ K.m}^{-3}\text{s}$.
Le temps caractéristique est obtenu lorsque l'évolution est à 63 % de l'évolution maximale, c'est à dire lorsque la température vaut 25 degrés. On obtient $\tau = 1 \text{ min et } 30 \text{ s}$.

V. Contrôle du débit d'air conditionné

V.1 Étude du débit en fonction de l'inclinaison des volets du registre

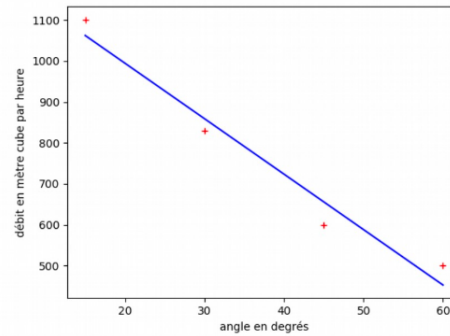
29. En utilisant les différents points de fonctionnement, tracer sur le document réponse la caractéristique de débit en fonction de l'angle d'inclinaison des volets. Sachant qu'il y a deux ventilateurs qui doublent le débit, proposer une modélisation affine sous la forme $D_m = K_R \theta + D$

Réponse :

Pour une surpression de 70 Pa, on relève les points de fonctionnement suivants :

Débits : 500, 600, 830, 1100

Angles : 60, 45, 30, 15



On obtient $K_r = -13,5 \text{ m}^3/\text{h}/\text{deg}$ et $D = 12,7 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{h}$

30. Écrire la fermeture géométrique de la boucle 0-1-4-3-0 en projection sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$. Éliminer le paramètre θ_4 . Mettre le résultat sous la forme $f(\theta_1, \theta_3) = 0$.

Réponse :

La fermeture géométrique s'écrit :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$$

En projection sur $\vec{x}_0$:

$$1,3l \cos \theta_1 + 2,8l \cos \theta_4 + 1,8l \cos \theta_3 + 0 = 0$$

En projection sur $\vec{y}_0$:

$$1,3l \sin \theta_1 + 2,8l \sin \theta_4 + 1,8l \sin \theta_3 - 2,5l = 0$$

Pour éliminer θ_4 on utilise $\cos^2 \theta_4 + \sin^2 \theta_4 = 1$, on obtient

$$(1,3 \cos \theta_1 + 1,8 \cos \theta_3)^2 + (2,5 - 1,3 \sin \theta_1 - 1,8 \sin \theta_3)^2 - 2,8^2 = 0$$

31. Recopier et compléter les lignes 15 à 18 de la fonction dichotomie

Réponse :

```
def Dichotomie(f,a,b,eps):
    if f(a)*f(b) >= 0 : return None
    while b-a > eps :
        c = (b-a)/2
        if f(a)f(c)<0 :
            b=c
        else :
            a = c
    return a
```

32. Proposer un modèle linéaire reliant θ à l'angle θ_1 sous la forme $\theta = 90 + K_c \theta_1$

Réponse :

$\theta \approx 90 - \theta_1$ semble convenir

CCINP PSI 2020 – Modélisation

Equation de Poisson

II.3 – Détermination du champ de température dans l'échangeur

Q24. En reprenant la démarche de l'énoncé, on écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \left(x + \frac{h}{2}, y \right) - \frac{\partial T}{\partial x} \left(x - \frac{h}{2}, y \right) \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} (T(x+h, y) - T(x, y)) - \frac{1}{h} (T(x, y) - T(x-h, y)) \right)\end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{h^2} (T(x+h, y) - 2T(x, y) + T(x-h, y))}$$

$$\text{Et de même : } \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{h^2} (T(x, y+h) - 2T(x, y) + T(x, y-h))}$$

Q25. D'après Q24, on obtient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}(x, y) = 0 \Leftrightarrow T(x-h, y) + T(x+h, y) + T(x, y-h) + T(x, y+h) - 4T(x, y) = 0$$

En identifiant avec l'expression de l'énoncé : $\boxed{a = b = c = d = 1 \text{ et } e = -4}$

Q26. En écrivant les équations pour les 3 couples (i, j) demandés, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} T_{(0,1)} + T_{(2,1)} + T_{(1,0)} + T_{(1,2)} - 4T_{(1,1)} = 0 \\ T_{(0,2)} + T_{(2,2)} + T_{(1,1)} + T_{(1,3)} - 4T_{(1,2)} = 0 \\ T_{(0,3)} + T_{(2,3)} + T_{(1,2)} + T_{(1,4)} - 4T_{(1,3)} = 0 \end{cases}$$

Or d'après les conditions limites imposées, on a :

$$T_{(0,1)} = T_{(0,2)} = T_{(0,3)} = T_{(1,0)} = T_{(1,4)} = T_{(2,1)} = T_{(2,2)} = T_{(2,3)} = T_1 \text{ et } T_{(1,0)} = T_2$$

D'où le système se réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 4.T_{(1,1)} - 1.T_{(1,2)} + 0.T_{(1,3)} = 2T_1 + T_2 \\ -1.T_{(1,1)} + 4.T_{(1,2)} - 1.T_{(1,3)} = 2T_1 \\ 0.T_{(1,1)} - 1.T_{(1,2)} + 4.T_{(1,3)} = 3T_1 \end{cases}$$

Q27. En identifiant le système précédent avec la forme donnée dans l'énoncé, on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2T_1 + T_2 \\ 2T_1 \\ 3T_1 \end{pmatrix}$$

Q28. Par lecture graphique, on lit directement qu'obtenir une erreur de 5% nécessite d'avoir $n = 6.10^2$ nœuds.

Q29. Comme on veut une incertitude sur la température la plus faible possible ($\|\delta T\|$ faible) il est nécessaire d'avoir une matrice A de conditionnement « faible » également. Parmi les valeurs proposées, on choisirait : $\boxed{cond(A) = 1}$

Q30. Pour la matrice A, on obtient : $\boxed{\|A\|_\infty = 234}$ (dernière ligne)

Pour la matrice A^{-1} , on obtient : $\boxed{\|A^{-1}\|_\infty = 99}$ (1^{ère} ligne)

Q31. $\boxed{cond(A) = 234 \times 99 = 23\,166}$ la matrice est donc mal conditionnée.

E3A PSI 2013 Physique-modélisation. partie informatique
Magnétomètre à vanne de flux

G1) def f(x, y, z): # Attention, fonction non définie en (0,0,0)
 return x**2 / (x**2 + y**2)**2

G2) def Choisir(a, b):
 return a + random() * (b - a) # donne a si random() donne 0
 et b si random() donne 1

G3) def Est_dans_tore(x, y, z)
 global a, R # cette ligne n'est pas obligatoire
 return (sqrt(x**2 + y**2) - R)**2 + z**2 <= a**2.
 # la réponse est un booléen, on ne rajoute pas de == True.

G4) def Choisir_point():
 x = Choisir(-(R+a), R+a)
 y = Choisir(-(R+a), R+a)
 z = Choisir(-a, a)
 return x, y, z

G5) I, I2 = 0, 0
 Npts = 0 # nb de points dans le tore
 while Npts <= N: # on s'arrête quand on a N points dans le tore
 x, y, z = Choisir_point()
 if Est_dans_tore(x, y, z): # Pas de == True
 Npts = Npts + 1
 ff = f(x, y, z) # pas de problème avec (0,0,0) qui est hors du tore
 I = I + ff
 I2 = I2 + ff**2 # "sinon" on ne fait rien.
 # quand on a calculé $I = \sum_{i=1}^N f(n_i)$, $I2 = \sum_{i=1}^N f^2(n_i)$ et N.
 V = 2 * pi**2 * R * a**2 # le volume

alpha = V * I / N # I/N est < f >
 moycarr. = I2 / N # c'est < f^2 >
 err = V * sqrt((moycarr - (I/N)**2) / N)

H1) def Produit(sx, sy):
 rep = [] # la fonction renvoie 1 liste
 for i in range(len(sx)): # même longueur que sy
 rep.append(sx[i] * sy[i])
 return rep
 ou alors, par compréhension de liste.
 def Produit(sx, sy)
 rep = [sx[i] * sy[i] for i in range(len(sx))]
 return rep

H2) def Moyenne(L):
 rep = 0
 l = len(L)
 for elm in L:
 rep = rep + elm # on fait la somme de tous les éléments
 return rep / l # somme / nb de termes = la moyenne

H3) def Valeur_max(L):
 prov = L[0] # c'est le maximum provisoire.
 for elm in L: # on va tester L[0], mais ça ne prend pas trop de temps.
 if elm > prov:
 prov = elm # on change le max provisoire si l'élément est plus grand que l'ancien max provisoire
 return prov

H4] def Moyenne-nulle (L):

$\Pi = \text{Moyenne}(L)$

return [elm - Π for elm in L] # on décale tous les points de la valeur moyenne.

H5] def Intercorr_n(x, y, n): # on suppose les signaux de moyenne nulle.

C = 0

fonction
intermédiaire
qui calcule
C(n)

for k in range(l, ll):

boucle for (1)

C = C + x[k] * y[k-n]

return C

def Intercorr(x, y):

return [Intercorr_n(x, y, n) for n in range(0, l)]

H6] Il y a l éléments.

On va calculer la complexité en nombre de multiplications, qui est l'opération la plus lente ici:

Pour chaque passage dans la boucle for (1): 1 multiplication

Pour chaque utilisation de Intercorr_n: l multiplications (l passages)

Pour Intercorr (l utilisations de Intercorr_n): l^2 multiplications.

Cela fait une complexité de l^2 en nombre de multiplications

Centrale PC 2023

I. Une première évolution de la forme du casque : du casque classique vers le casque profilé en goutte d'eau

I.A – Évaluation du gain en puissance par une approche empirique

I.A.1) Étude de la phase de démarrage

Q1. Le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho v L}{\eta}$ caractérise la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent). Avec L une distance caractéristique des variations de v.

Prenons L = 0,5 m (largeur d'épaule) : $Re = \frac{1,225 \cdot 40 \cdot 1,8}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 4.10^5$.

On est dans l'intervalle proposé, on pourra donc supposer le modèle adapté.

Q2. Bilan des actions sur le système cycliste + vélo : $\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_r$, $\vec{F}_N$
On applique le théorème du centre de masse au système cycliste + vélo :
Projection sur Ox :

$$m \frac{dv}{dt} = m g \sin \alpha - \mu_r N - \frac{1}{2} \rho S C_x v^2$$

Projection sur Oy

$$0 = m g \cos \alpha - N$$

D'où

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\rho S C_x}{2m} v^2 = g(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha)$$

$$a = \frac{\rho S C_x}{2m} = \frac{1,225 \cdot 0,30}{2 \cdot 80} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}; \quad b = g(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha) = 9,8(\sin 0,1 - 6,4 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 0,1) = 0,92 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Q3. En régime permanent $\frac{dv}{dt} = 0$
d'où

$$v_{\text{lim}}^2 = b/a = \frac{2mg(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha)}{\rho S C_x}$$

$$K = \frac{2mg(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha)}{\rho}$$

Q4. $v_{\text{lim}} = \sqrt{b/a} = \sqrt{0,92/2,3 \cdot 10^{-3}} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ plutôt rapide mais plausible.

Q5. Lignes 1et 2 : importation des bibliothèques.
Ligne 3 à 7 : définit une fonction r ayant comme arguments f, v et t.
L'argument t est la liste des instants successifs, v est la vitesse initiale, et f l'accélération.
Cette fonction renvoie la liste des vitesses V aux instants successifs de la liste t à partir de la méthode d'Euler appliquée à l'équation différentielle (I.1) discrétisée.
Lignes 8 et 9 : Renvoie F/m = 0,92 - 2,2.10⁻³v² fonction trouvée en Q2
Ligne 10 définit une liste des temps

Ligne11 : calcule la liste des vitesses avec les données de l'exercice.

Lignes12 et 13 : tracé du graphe v(t)

Q6. Le vecteur x est un array numpy qui contient 1000 valeurs du temps également réparties entre 0 et 120 (secondes)

Courbe 1 : échantillonnage correct, correspond à la courbe cherchée, $v_{\text{lim}} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Courbe 2 : échantillonnage 100 fois plus faible que le précédent, on obtient une courbe affine de 12 morceaux,

Courbe 3 : échantillonnage correct, mais un intervalle de temps 10 fois plus faible que celui de la courbe 1, la vitesse limite n'est pas atteinte.

Courbe 4 : échantillonnage trop faible, courbe à 10 segments, intervalle de temps plus important, sur le 1^{er} segment la vitesse finale est supérieure à la vitesse limite, donc sur le 2^e segment l'accélération est négative, d'où la courbe en dents de scie. La méthode d'Euler ne converge pas.

Q7. $L_{RP} = \int_0^{t_f} v(t) dt$ où t_f est environ égal à 40 s si on se place à 95% de v_{lim} , soit $v = 19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

En assimilant l'accélération en régime transitoire à une constante d'après la courbe 3

$$V = a \cdot t; \quad L_{RP} = a \cdot t_f^2 / 2 = (10/12) \cdot 40^2 / 2 = 670 \text{ m}$$

Cette valeur surestime LRP, c'est un majorant.

On peut calculer un minorant en assimilant la courbe 1 à une courbe affine entre les points $t = 0, v = 0$ et $t = 40 \text{ s}, v = 38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On a alors : $L_{RP} = 40 \cdot 19 / 2 = 380 \text{ m}$.

Q8. def LRP(v,t):

L=0

i=0

while v[i]<.95*v[-1]:#v[-1] est la vitesse limite.

L+=v[i+1]*(t[i+1]-t[i])

i+=1

return L

Remarque : ce script suppose que la vitesse limite est atteinte ! Avec les valeurs du texte, il calcule : $L_{RP} = 506 \text{ m}$ pour 95 % de V_{limite} . C'est à peu près la moyenne des deux valeurs que nous avons à la question précédente.

I.A.2) Étude du régime permanent dans la descente de Laffrey

Q9. Sur le tableur de la calculatrice pour chaque valeur de T_c pour le casque classique il faut calculer $v_c = L' / T_c$; résultats affichés $\langle v_c \rangle = 18,526 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et l'écart-type affiché est $\sigma_v = 0,1143 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ d'où :

$$u(\langle v_c \rangle) = \sigma_v / \sqrt{10} = 0,036 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{soit } \langle v_c \rangle = 18,526 \pm 0,036 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q10. Les histogrammes donnés peuvent être approximés à une gaussienne de valeur centrale 18,5 pour le casque classique et de demi- largeur à mi-hauteur $(18,7-18,4)/2 = 0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, proche de l'incertitude type calculée précédemment sur une mesure.

Remarque : en toute rigueur, la largeur à mi-hauteur d'une gaussienne est liée à l'écart type par :

$$\Delta v = 2\sqrt{2 \ln(2)} \sigma \approx 2,36 \sigma$$

Les étudiants doivent-ils savoir cela ?

Pour le casque profilé la valeur centrale est 19,3 et a largeur à mi-hauteur $(19,4-19,1)/2 = 0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui correspond à une valeur de l'incertitude-type $u(\langle v \rangle) = 0,15/10^{0,5} = 0,047 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, proche de la valeur donnée dans l'énoncé.

Conclusion : La démarche expérimentale est pertinente, que l'incertitude type soit évaluée comme de type A ou de type B, car l'écart entre les deux valeurs moyennes $19,25 - 18,53 = 0,72 \text{ m.s}^{-1}$ est plus de 15 fois plus élevé que la plus grande des incertitudes type sur la moyenne, ce qui valide la démarche expérimentale.

Remarque : on ne comprend pas bien ce que demande cette question : doit-on vérifier que la variabilité observée expérimentalement est cohérente avec la simulation, ou que l'écart entre les deux valeurs de vitesse est significatif ?

Q11. $AN K = b \cdot 2m / \rho = 0,916 \cdot 2 \cdot 80 / 1,225 = 119,6 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2}$.

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
```

```
def MonteCarlo2(
    vitesseMoyenne:float, # vitesse moyenne du cycliste (m/s)
    incertitudeType:float, # incertitude type sur la vitesse (m/s)
    N:int, # nombre d'échantillons à produire
    K:float, # constante dans vlim
) -> [float]: # tableau de N valeurs de Scx simulées
    generateur = rd.default_rng()
    V = generateur.normal(vitesseMoyenne, incertitudeType, N) # on génère les valeurs de v
    SCx = K/V**2
    return (np.mean(SCx), np.std(SCx))
```

```
print(MonteCarlo2(18.52, 0.041, 10000, 119.6))
print(MonteCarlo2(19.25, 0.036, 10000, 119.6))
```

Réponse de la console :
 (0.3484668177681698, 0.0013612509872095047)
 (0.32275327064773107, 0.0013836612783945698)

D'où $SCx(\text{classique}) = 0,3484 \pm 0,0013 \text{ m}^2$
 $SCx(\text{profilé}) = 0,3227 \pm 0,0014 \text{ m}^2$

Je ne trouve pas les mêmes résultats que l'énoncé.

Q12 : Puissance du poids $P_p = m\vec{g} \cdot \vec{v} = mgv \sin \alpha$;
 Puissance de $\vec{N}$ $P_N = 0$ (perpendiculaire au mouvement)
 Puissance de $\vec{F}_r$ $P_r = -\mu_r mg \cos \alpha \cdot v$
 Puissance de $\vec{F}_T$ $P_T = \frac{1}{2} \rho SC_x v^3$

Q13. Le gain en puissance n'est pas défini ; disons qu'il s'agit de calculer pour la vitesse donnée, constante, la différence relative :

$$G = \frac{[P_r(\text{classique}) - P_r(\text{profilé})] \cdot 100}{P_r(\text{classique})} \\
= \frac{[SC_x(\text{classique}) - SC_x(\text{profilé})] \cdot 100}{SC_x(\text{classique})} \\
= \frac{[0,3484 - 0,3227] \cdot 100}{0,3484} = 7,4 \%$$

Le « gain en puissance » du au casque profilé est 7,4 %, cohérent avec les 2 à 8% de l'introduction.

Cette valeur n'a en réalité pas de sens, puisque la valeur de SC_x ne dépend pas uniquement du casque, mais également de la vitesse (cf courbe de C_x pour une balle, seule au programme de PC).

Centrale PC 2023

Faut-il supposer que les valeurs du tableau 2 donnent des valeurs de SC_x à même vitesse ?

Pour l'incertitude type sur ce résultat, on fait une composition des incertitudes :

$$\frac{u(G)}{G} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{u(SC_x(\text{classique}))^2 + u(SC_x(\text{profilé}))^2}}{SC_x(\text{classique}) - SC_x(\text{profilé})} \right)^2 + \left(\frac{u(SC_x(\text{classique}))}{SC_x(\text{classique})} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{0,0036^2 + 0,0037^2}}{0,3051 - 0,2937} \right)^2 + \left(\frac{0,0036}{0,3051} \right)^2} = 0,45$$

L'incertitude type est donc de 45 %, ce qui rend le résultat plus que douteux.

Moteur du variateur électrique

Q11 - Par déf. du rendement $\boxed{\eta_g} = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{consommée}}} = \frac{P_{\text{mécan}}}{U I}$

↗ sortie
↘ entrée

Q12 - Pour un pas de vis p ,
la relation entre la vitesse linéaire (de translation) v
et la vitesse de rotation Ω_2 est $\boxed{v = \frac{p}{2\pi} \Omega_2}$

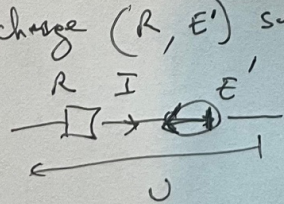
D'autre part, le rapport de réduct est déf. par

$$\boxed{\Omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}}$$

donc $\boxed{\Omega_1} = \frac{\Omega_2}{\eta} = \frac{\frac{2\pi}{p} v}{\eta} = \boxed{\mu v}$

avec $\boxed{\mu = \frac{2\pi}{p \eta}}$

Q13 - Un moteur à courant continu est modélisé
électriquement par une charge (R, L, E') (avec L faible).
Dans le cas du régime permanent $U_L = L \frac{di}{dt} = 0$
et une charge (R, E') suffit.



$U = RI + E'$ force contre-électro.

avec $E' = \Phi \Omega_1$ constante de couple (en Weber et flux)

Soit $U = RI + \Phi \Omega_1$

→ $\boxed{\Omega_1 = \frac{U}{\Phi} - \frac{R}{\Phi} I}$

Q14 - L'obtention des incertitudes sur a et b
repose sur une méthode de Monte-Carlo $\Rightarrow$ f def $f(x, y, u)$

On produit un grand nombre N de données simulées
à partir des mesures de x, y et de leurs incertitudes
exemple $\Rightarrow x_{\text{sim}} = x + \text{rd. normal}(0, \sigma_x)$
type $u(x)$ et $u(y)$

On tire une valeur aléatoire avec un écart type de σ_x
pour simuler le bruit affectant la valeur de x .
(incertitude)

Pour chaque jeu de données, on réalise une régression
linéaire qui permet d'obtenir a_{sim} et b_{sim}
 $a_{\text{sim}}[i], b_{\text{sim}}[i] = \text{np.polyfit}(x_{\text{sim}}, y_{\text{sim}})$
ordre 1 régression linéaire

On obtient ainsi un tableau
de N valeurs de a_{sim} et b_{sim} .

Les incertitudes-type sur a et $b \Rightarrow u(a)$ et $u(b)$
sont alors les écarts-types de ces 2 jeux de

N données $\rightarrow u_a = \text{np.std}(a_{\text{sim}}, \text{ddof}=1)$
 $u_b = \text{np.std}(b_{\text{sim}}, \text{ddof}=1)$

Q15 - La vitesse de rotation Ω_1 et son incertitude-type
est calculées à partir de la vitesse v et de $u(v)$

$\hookrightarrow \Omega_1 = \mu v$ ($\Rightarrow \Omega_1 = \mu v$)

$u\Omega_1 = \mu u v$

la vitesse de rotation s'exprime par la relation linéaire

$$\underline{L_z(I)} = \frac{U}{\phi} - \frac{R}{\phi} I = \underline{a I + b}$$

avec $a = -\frac{R}{\phi}$ et $b = \frac{U}{\phi}$

On est en droit d'utiliser la fonction de régression linéaire.

la valeur de b donnera accès à $\phi = \frac{U}{b}$
 la valeur de a ———— à $R = -a \phi$

Pour leurs incertitudes, on exploite l'annexe 2 :

• pour $u(\phi)$: on néglige l'incertitude-type sur U

$$\boxed{u(\phi) = \phi \sqrt{\left(\frac{u(b)}{b}\right)^2} = \boxed{\phi \frac{u(b)}{b}}}$$

• pour $u(R)$:

$$\boxed{u(R) = R \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(\phi)}{\phi}\right)^2}}$$

Code Python :

$$a, b, u_a, u_b = f(I, w_t, uI, u_w_t, 1000)$$

$$\phi = \frac{U}{b} ; R = -a * \phi$$

$$u\phi = \phi * \frac{u_b}{b}$$

$$uR = R * \text{np.sqrt}\left(\left(\frac{u_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{u\phi}{\phi}\right)^2\right)$$

2.16 - Avec un seul chiffre significatif pour les incertitudes - type
 $R = 9,3 \Omega \pm 0,5 \Omega$ et $\phi = 9,157 \pm 0,002$ _{wb}