

## Partie I – Transmission de signal par câble coaxial CCINP 2018 PC

**Q2.** La loi des mailles donne, en notant  $u_L$  la tension aux bornes de la bobine, en convention récepteur :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + u_L$$

Or  $u_L = \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$  et  $u(x + dx, t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx$  donc

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$$

Ensuite, la loi des nœuds donne, en notant  $i_C$  le courant qui "descend" dans le condensateur :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + i_C$$

Or  $i_C = \Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} = \Gamma dx \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$  au premier ordre, et  $i(x + dx, t) = i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} dx$  donc

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

**Q3.** On dérive la première équation par rapport au temps et la seconde par rapport à l'espace, et on assimile les dérivées croisées :  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$  (théorème de SCHWARTZ). Il vient alors :

$$-\Lambda \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

De même, en dérivant la première équation par rapport à  $x$  et la seconde par rapport à  $t$ , et en assimilant les dérivées croisées de  $i(x, t)$  :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

On reconnaît dans les 2 cas une équation de D'ALEMBERT avec une célérité des ondes  $v = \sqrt{\frac{1}{\Lambda \Gamma}}$ .

$v$  est bien une vitesse pour que l'équation reste homogène :  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$  est en  $V.s^{-2}$  et  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$  est en  $V.m^{-2}$  donc  $v$  est bien en  $m.s^{-1}$ .  
Autre manière de le vérifier :  $\sqrt{\frac{1}{LC}}$  est la pulsation caractéristique d'un circuit RLC, donc en  $s^{-1}$ , or  $\Gamma$  et  $\Lambda$  sont des grandeurs linéiques donc  $\sqrt{\frac{1}{\Lambda \Gamma}}$  est bien en  $m.s^{-1}$ .

**Q4.** On injecte la solution proposée dans l'équation de D'ALEMBERT. Comme  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = (j\omega)^2 u(x, t)$  et  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = (-jk)^2 u(x, t)$ , celle-ci devient :

$$-k^2 u(x, t) + \frac{\omega^2}{v^2} u(x, t) = 0 \Rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

On obtient la relation de dispersion usuelle associée à l'équation de D'ALEMBERT : en effet, on a cherché une solution en somme d'OPPM se propageant dans le sens des  $x$  croissants (terme en  $i_0$ ) et décroissants (terme en  $i_1$ ).

**Q5.** On injecte la solution proposée dans l'une des équations de couplage, par exemple  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$  :

$$-jk\rho i_0 e^{j(\omega t - kx)} - jk\rho i_1 e^{j(\omega t + kx)} = -\Lambda j\omega i_0 e^{j(\omega t - kx)} - \Lambda j\omega i_1 e^{j(\omega t + kx)}$$

On en déduit :

$$k\rho = \Lambda\omega \Rightarrow \boxed{\rho = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_c}$$

Si  $u$  est une tension et  $i$  une intensité,  $\rho$  et donc  $Z_c$  sont des impédances, homogènes à des résistances, donc en  $\Omega$ .

**Q6.** On applique la loi d'OHM à l'extrémité du câble :  $\underline{u}(d, t) = \underline{Z} \underline{i}(d, t)$  :

$$\rho i_0 e^{j(\omega t - kd)} - \rho i_1 e^{j(\omega t + kd)} = \underline{Z} i_0 e^{j(\omega t - kd)} + \underline{Z} i_1 e^{j(\omega t + kd)}$$

$$i_0(\rho - \underline{Z}) e^{-jkd} = i_1(\rho + \underline{Z}) e^{+jkd} \Rightarrow \boxed{i_1 = i_0 \frac{\rho - \underline{Z}}{\rho + \underline{Z}} e^{-2jkd}}$$

**Q7.**  $r = \frac{\rho - \underline{Z}}{\rho + \underline{Z}} e^{-2jkd}$  le coefficient de réflexion pour exprimer  $\underline{Z}_l(x)$  :

$$\underline{Z}_l(x) = \frac{\underline{u}(x, t)}{\underline{i}(x, t)} = \frac{\rho(i_0 e^{-jkx} - i_1 e^{+jkx})}{i_0 e^{-jkx} + i_1 e^{+jkx}}$$

$$\underline{Z}_l(x) = \rho \frac{e^{-jkx} - \chi e^{+jkx}}{e^{-jkx} + \chi e^{+jkx}} = \rho \frac{(\rho + \underline{Z}) e^{-2jkx} - (\rho - \underline{Z}) e^{-2jkd}}{(\rho + \underline{Z}) e^{-2jkx} + (\rho - \underline{Z}) e^{-2jkd}}$$

$\underline{Z}_l(x)$  est donc indépendant de  $x$  si  $\boxed{\rho = \underline{Z} = Z_c}$ . Dans ce cas,  $\underline{Z}_l(x) = \rho$  et  $\chi = 0$ , c'est-à-dire  $\boxed{i_1 = 0}$  : il n'y a **pas d'onde réfléchie** : toute l'onde est transmise, ce qui optimise le transfert du signal. Il faut donc mettre en bout de câble une impédance égale à  $Z_c$  ("adaptation d'impédance").

## I.2 Le câble coaxial avec pertes

**Q8.** Les parties métalliques (gaine et âme) sont en métal non parfait, ayant une conductivité limitée, donc une certaine résistance : il y a donc des pertes par effet JOULE.

**Q9.** La loi des mailles donne cette fois :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + u_L + u_R$$

Or  $u_L = \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$ ,  $u_R = r dx i(x, t)$  et  $u(x + dx, t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx$  donc

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - r i(x, t)$$

Par ailleurs, on a toujours  $\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$  par la loi des nœuds. En dérivant la première équation par rapport à  $x$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -r \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} - \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$$

En remplaçant avec la seconde équation, on obtient la relation demandée :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = r\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \Gamma\Lambda \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}}$$

**Q10.** On injecte la solution proposée :

$$(-jk)^2 = \Gamma\Lambda(j\omega)^2 + r\Gamma j\omega$$

D'où la relation de dispersion :  $\boxed{k^2 = \Gamma\Lambda\omega^2 - r\Gamma j\omega}$ .

**Q11.** Si  $k = \alpha - j\beta$ , on peut écrire  $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$ . Ainsi  $\alpha$  correspond à l'aspect propagatif de l'onde, et  $\beta$  à l'absorption de l'onde (sur une distance caractéristique  $1/\beta$ ). Si  $\alpha > 0$ , l'onde se propage vers les  $x$  croissants, donc  $\beta > 0$  pour avoir une atténuation, cohérente avec la dissipation d'énergie par effet JOULE.

**Q12.** On a  $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$  et  $\underline{i}(x, t) = i_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$ , donc la puissance moyenne s'écrit :

$$P(x) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{u}(x, t) \underline{i}^*(x, t)) = \frac{1}{2} u_0 i_0 e^{-2\beta x} = P_0 e^{-2\beta x}$$

On en déduit  $A = \frac{10}{\ln 10} \frac{2\beta x}{x} = 2\beta \frac{10}{\ln 10}$ .

**Q13.** On a  $\underline{k}^2 = \Gamma \Lambda \omega^2 \left(1 - \frac{r\Gamma j\omega}{\Gamma \Lambda \omega^2}\right)$ . On passe à la puissance 1/2, puis on utilise le DL de  $(1+x)^\alpha$  pour  $x \ll 1$  (en admettant qu'il fonctionne pour les complexes et que la racine est définie également...) :

$$\underline{k} \approx \sqrt{\Gamma \Lambda} \omega \left(1 - \frac{r\Gamma j\omega}{2\Gamma \Lambda \omega^2}\right)$$

On identifie la partie imaginaire de  $\underline{k}$  à  $\beta$  donc on trouve  $\beta = \sqrt{\Gamma \Lambda} \omega \cdot \frac{r\Gamma \omega}{2\Gamma \Lambda \omega^2} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$ . On reporte dans l'expression de A pour obtenir l'expression demandée :

$$A = 2\beta \frac{10}{\ln 10} = \frac{10}{\ln 10} r \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$$

**Q14.** Le phénomène responsable est l'**effet de peau** : le champ EM ne pénètre dans un conducteur ohmique que sur une profondeur caractéristique  $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ , donc le courant ne circule que sur cette épaisseur caractéristique. Ainsi, lorsque la fréquence augmente, la section de conduction diminue donc la résistance augmente avec  $r \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ .

## Partie II – Ondes acoustiques et oreille externe

### Centrale 2015 PC

## I Ondes acoustiques et oreille externe

### I.A – Équations des ondes acoustiques

I.A.1) L'approximation acoustique consiste à considérer :

- les perturbations dues à l'onde faibles devant les grandeurs d'équilibre,
- la vitesse des particules de fluide faible devant la célérité des ondes.

Ordre de grandeur de la surpression engendrée par une personne qui parle : 10 mPa.

I.A.2) *Équations locales :*

$$\cdot \text{Équation de continuité : } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\cdot \text{Équation d'Euler (on néglige le poids) : } \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P \quad (2)$$

$$\cdot \text{Compressibilité du milieu : } \chi_s = \left( \frac{\partial(\ln(\rho))}{\partial P} \right)_s \quad (3)$$

Étant donné que toutes les évolutions seront isentropiques dans la suite, on peut écrire cette dernière relation sous la forme :  $\chi_s = \frac{d(\ln(\rho))}{dP}$  (fluide barotrope  $P = f(\rho)$  uniquement)

*Expressions linéarisées :*

$$(1') : \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\vec{v}) = 0$$

$$(2') : \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p$$

$$(3') : \chi_s = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\mu}{dp}$$

Équation de propagation pour la surpression:

$$\text{div}(2') \Leftrightarrow \boxed{\rho_0 \frac{\partial \text{div}(\vec{v})}{\partial t} = -\Delta p} \quad (2'') \quad (\text{en utilisant le théorème de Schwarz})$$

$$\text{(1')} \text{ et } (3') \Rightarrow \text{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\mu}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{en utilisant le th. de dérivation des fonctions composées})$$

$$= -\chi_s \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4)$$

$$\frac{\partial(4)}{\partial t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial \text{div}(\vec{v})}{\partial t} = -\chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}} \quad (4')$$

$$(2'') \text{ et } (4') \Rightarrow \Delta p = \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \text{ avec la célérité } \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}}.$$

I.A.3) Pour une évolution isentropique d'un gaz parfait,  $P\rho^{-\gamma} = Cte$  (loi de Laplace), donc  $\chi_s = \frac{1}{\gamma P_0}$ .

Par ailleurs,  $\rho_0 = \frac{MP_0}{RT}$  d'après l'équation d'état ( $M$  étant la masse molaire), donc  $\boxed{c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}}$ .

Pour l'air à 290 K et sous 1,0 bar :  $c = \sqrt{\frac{1,40.8,31.290}{28,8.10^{-3}}} = 342 \text{ m.s}^{-1}$ .

I.A.4) Pour l'eau, la masse volumique est plus élevée que celle de l'air ( $\times 10^3$  environ), mais la compressibilité beaucoup plus faible ( $\chi_{s,\text{air}} \approx 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$ ,  $\chi_{s,\text{eau}} \approx 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ ), d'où une célérité plus grande.

I.A.5) Plusieurs éléments contribuent à la difficulté de localiser un son d'une fréquence de l'ordre de quelques centaines de hertz (hélice de bateau) dans l'eau :

- La longueur d'onde dans l'eau est de l'ordre de 3 m à 500 Hz, par exemple, alors qu'elle est de 70 cm dans l'air : la source peut être localisée dans l'air par la différence des ondes reçues par les deux oreilles ; dans l'eau, en revanche, la distance séparant les oreilles est très faible devant la longueur d'onde, et le son donc quasi identique (d'autant que le cerveau se réfère à l'audition dans l'air par habitude...),

- La diffraction par les surfaces rencontrées par les ondes entre le moteur et le plongeur (par exemple la surface irrégulière de la mer) renvoie le son dans toutes les directions car la longueur d'onde est grande devant les variations spatiales. C'est également le cas lors de l'émission au niveau de l'hélice. Le son arrive donc sur le plongeur de plusieurs directions.

- L'oreille externe n'est pas bien adaptée à l'audition sous l'eau (rupture d'impédance entre l'eau et l'air qui reste dans le conduit), et la conduction des sons par la boîte crânienne jusqu'à l'oreille interne joue un rôle plus important que dans l'air. Ce mode d'audition est beaucoup moins directionnel que le système pavillon-conduit acoustique de l'oreille externe, qui avec une seule oreille, permet aussi une localisation par recherche de la direction de son maximal.

I.A.6) On obtient la relation demandée ("théorème de Poynting acoustique"), en utilisant la relation d'analyse vectorielle (non donnée) :  $\text{div}(p\vec{v}) = p \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p$ , ainsi que (2') et (4) :

$$\text{div}(p\vec{v}) = -p \chi_s \frac{\partial p}{\partial t} - \rho_0 \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \chi_s \frac{p^2}{2} + \rho_0 \frac{v^2}{2} \right)$$

Signification :

Dans tout volume du fluide l'énergie acoustique, de densité volumique  $\chi_s \frac{p^2}{2} + \rho_0 \frac{v^2}{2}$  (densité volumique d'énergie potentielle élastique + densité volumique d'énergie cinétique), ne varie que par échange à travers la surface, le flux de  $p\vec{v}$  sur une surface représentant la puissance acoustique qui la traverse.

Analogie :

Théorème de Poynting pour une onde électromagnétique dans le vide :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \text{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = 0.$$

I.B – Impédance et intensité acoustique

I.B.1) Si  $p$  et  $v$  ne sont fonctions que de  $\tau = t - x/c$ , (2') s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \vec{u}_x \quad (\vec{u}_x \text{ unitaire}), \text{ ou encore } \boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} = \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial \tau} \vec{u}_x}$$

(en utilisant une nouvelle fois le th. de dérivation des fonctions composées), d'où  $\boxed{\rho_0 c \vec{v} = p \vec{u}_x + Cte}$ .

En l'absence d'onde,  $p = 0$  et  $\vec{v} = \vec{0}$  : le vecteur constant est donc nul.

$$\vec{v} = \frac{p}{Z} \vec{u}_x, \text{ avec } \boxed{Z = \rho_0 c}.$$

Nota : Le rapport du jury indique que cette démonstration pour une onde non nécessairement sinusoïdale était exigée alors que celle-ci est hors programme !

§ 5.1.2 : " Structure des ondes planes progressives harmoniques homogènes : caractère longitudinal, impédance acoustique."

$$\text{A.N. : } Z_{\text{air}} (1,0 \text{ bar ; } 290\text{K}) = 1,19 \times 342 = 408 \text{ Pa.s.m}^{-1} \quad \left( \rho_0 = \frac{MP_0}{RT} \right)$$

$$Z_{\text{eau}} \approx 10^3 \times 1,5 \cdot 10^3 \approx 1,5 \cdot 10^6 \text{ Pa.s.m}^{-1}. \text{ On remarque que } Z_{\text{eau}} \gg Z_{\text{air}}.$$

$$\text{I.B.2) } I = \langle \|p\vec{v}\| \rangle_{\text{temps}} = \left\langle \frac{p^2}{Z} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{Z} = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho_0 c}.$$

I.B.3) Le déplacement acoustique  $u$  est lié à la vitesse acoustique par  $v = \frac{\partial u}{\partial t} \Leftrightarrow \underline{v} = j\omega u$ ,

$$\text{d'où } \boxed{u_0 = \frac{v_0}{\omega} = \frac{p_0}{Z\omega}}.$$

$$\text{D'après la question précédente : } \boxed{p_0 = \sqrt{2\rho_0 c I}}, \text{ donc } \boxed{u_0 = \frac{\sqrt{2\rho_0 c I}}{Z\omega} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2I}{\rho_0 c}}}$$

A.N. : À 440 Hz, au seuil d'audition ( $I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ ),  $u_0 = \frac{1}{2\pi.440} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-12}}{408}} \approx 25 \text{ pm}$ , inférieur aux dimensions atomiques !

Au seuil de la douleur,  $I = 1 \text{ W.m}^{-2}$  (document 1) :  $u_0 = \frac{1}{2\pi.440} \sqrt{\frac{2}{408}} \approx 25 \text{ } \mu\text{m}$ , encore très faible.

(Nota : La mention du niveau acoustique n'intervient ici qu'à titre de rappel de la définition puisque les puissances sont données dans le document 1.)

### I.C – L'oreille externe

I.C.1) Dans un cornet acoustique (comme celui du professeur Tournesol), la surface à une forme telle que les réflexions multiples sur les parois renvoient vers l'axe une bonne partie de l'énergie incidente, initialement répartie sur la surface d'entrée. Le pavillon de l'oreille est moins symétrique, mais la fonction est la même (l'effet inverse est recherché avec un cornet de gramophone ou de porte-voix ou le pavillon d'un trombone !).

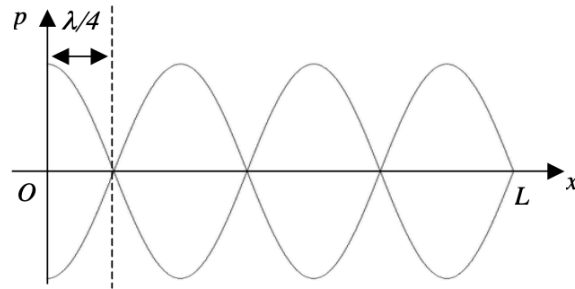
I.C.2) *Impédance nulle* :  $p$  doit s'annuler. Il suffit de laisser l'extrémité ouverte, la pression sera imposée par l'atmosphère extérieure, au repos, par continuité de la pression.

*Impédance infinie* :  $v$  doit s'annuler. Par continuité de la vitesse normale, on doit utiliser une paroi rigide orthogonale à la vitesse.

L'onde résultant de la superposition des ondes incidente et réfléchi est stationnaire car les coefficients de réflexion ont un module égal à 1 dans ces deux cas.

I.C.3) Le son sera particulièrement amplifié lorsqu'il y aura résonance, c'est-à-dire, pour un tuyau de longueur  $L$  ouvert à une extrémité et fermé à l'autre :  $L = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Représentation des valeurs extrémales de la surpression pour  $n = 3$  : un nœud et un ventre voisins sont distants de  $\frac{\lambda}{4}$ .



$$D'où \quad f = (2n + 1) \frac{c}{4L} = (2n + 1) \frac{340}{4 \times 3.10^{-2}} = (2n + 1) \times 2,8.10^3$$

$$\text{avec } f \in [20 \text{ Hz}, 20 \text{ kHz}], 2n + 1 \in [1..7] \Leftrightarrow n \in [0..3] \Leftrightarrow f \in \{2,8 ; 8,4 ; 14 ; 19,6\} \text{ kHz.}$$

On retrouve à peu près le maximum de sensibilité situé entre 3 et 4 kHz sur la courbe du document 4 : il correspond au mode  $n = 0$  soit  $L = \frac{\lambda}{4}$ . Les résonances dues aux modes d'ordre 1 et 2 (oublions celui d'ordre 3, trop limite) semblent masquées par d'autres phénomènes...

### Partie III – Chlorure de sodium

#### E3A 2024 PSI

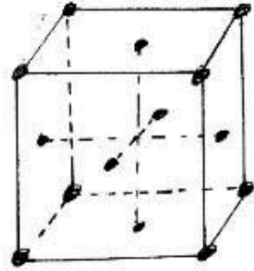
Q34. Maille cubique à faces centrées (cfc), voir figure ci-contre.

Sachant que les 8 atomes aux sommets sont partagés entre 8 mailles et les 6 atomes aux centres des faces sont partagés entre 2 mailles, le nombre d'atomes de cuivre par maille est :

$$N = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$$

Le contact entre atomes se fait selon la diagonale d'une face, d'où :

$$a\sqrt{2} = 4R_{Cu}$$



Q35. Par définition de la masse volumique :

$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{NM_{Cu}}{N_a a^3} = \frac{NM_{Cu}}{N_a \left(\frac{4R_{Cu}}{\sqrt{2}}\right)^3} \Leftrightarrow \rho = \frac{NM_{Cu}}{16\sqrt{2}N_a R_{Cu}^3}$$

$$\underline{AN} : \rho = \frac{4 \times 63,5.10^{-3}}{16\sqrt{2} \times 6,0.10^{23} \times (128.10^{-12})^3} = 8,89.10^3 \text{ kg. m}^{-3}$$

Q36. Dans une maille cfc, les sites octaédriques sont situés :

- au centre de la maille (entièrement dans la maille)
- au milieu de chaque arête (partagé entre 4 mailles)

$$\Rightarrow N_o = 1 + 12 \times \frac{1}{4} = 4$$

En se plaçant le long d'une arête, on détermine la dimension du site octaédrique :

$$2R_{Cu} + 2R_o = a \Leftrightarrow R_o = \frac{a}{2} - R_{Cu} = \left(\frac{4}{2\sqrt{2}} - 1\right) R_{Cu} \Leftrightarrow R_o = (\sqrt{2} - 1)R_{Cu}$$

$$\underline{AN} : R_o = 53,0 \text{ pm}$$

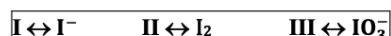
Q37. On a :  $R_{Sn} > R_o$ , donc les atomes d'étain ne peuvent pas se placer dans les sites octaédriques de la structure cfc du cuivre (ce ne serait pas non plus possible dans les sites tétraédriques qui sont encore plus petits que les sites octaédriques). Par conséquent, le bronze est un **alliage de substitution**.

**Partie IV – Dosage du glucose dans une boisson isotonique  
CCINP 2023 PSI**

Q6. Sachant que  $no(O) = -II$  et en respectant les règles usuelles, on obtient :

espèces	I <sub>2</sub>	IO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	I <sup>-</sup>
no(I)	0	+V	-I

Les espèces étant placées dans le diagramme E-pH par nombre d'oxydation croissant selon l'axe des ordonnées, on peut associer les domaines :



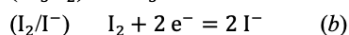
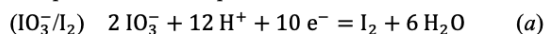
Q7. Le segment BD sépare les domaines I et III, il faut donc considérer le couple (IO<sub>3</sub><sup>-</sup>/I<sup>-</sup>) dont la demi-équation électronique est : IO<sub>3</sub><sup>-</sup> + 6 H<sup>+</sup> + 6 e<sup>-</sup> = I<sup>-</sup> + 3 H<sub>2</sub>O

La formule de Nernst s'écrit alors :

$$E = E^o + \frac{0,06}{6} \log \left( \frac{[\text{IO}_3^-][\text{H}^+]^6}{[\text{I}^-]} \right) = E^o + \frac{0,06}{6} \log([\text{H}^+]^6) = E^o - 0,06 \text{ pH}$$

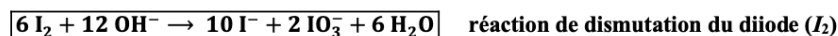
**La pente du segment BD est donc -0,06 V/pH**

Q8. Demi-équations électroniques :



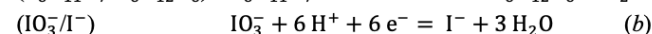
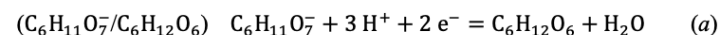
D'où 5(b) - (a) : 6 I<sub>2</sub> + 6 H<sub>2</sub>O → 10 I<sup>-</sup> + 2 IO<sub>3</sub><sup>-</sup> + 12 H<sup>+</sup>

Or on se place en milieu basique, on utilise alors l'autoprotolyse de l'eau (H<sub>2</sub>O = H<sup>+</sup> + OH<sup>-</sup>) pour obtenir :



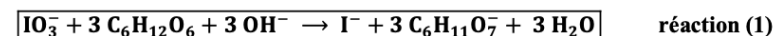
Q9. La réaction qui se produit lors de cette étape est lente, il faut donc attendre suffisamment longtemps afin que la réaction soit finie avant de passer à l'opération suivante.

Demi-équations électroniques :

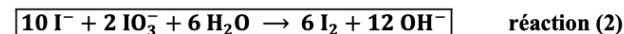


D'où (b) - 3(a) : IO<sub>3</sub><sup>-</sup> + 3 C<sub>6</sub>H<sub>12</sub>O<sub>6</sub> → I<sup>-</sup> + 3 C<sub>6</sub>H<sub>11</sub>O<sub>7</sub> + 3 H<sup>+</sup>

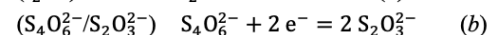
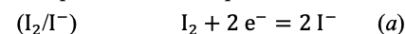
Or on se place en milieu basique, on utilise alors l'autoprotolyse de l'eau (H<sub>2</sub>O = H<sup>+</sup> + OH<sup>-</sup>) pour obtenir :



Q10. Il s'agit de la réaction inverse de celle écrite à la Q8 :



Q11. Demi-équations électroniques :



D'où (a) - (b) :  $\boxed{\text{I}_2 + 2 \text{S}_2\text{O}_3^{2-} \rightarrow 2 \text{I}^- + \text{S}_4\text{O}_6^{2-}}$  réaction (3)

La règle du gamma est vérifiée, de plus  $E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) - E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = 0,59 \text{ V} > 0,3 \text{ V}$  Donc la réaction est quasi-totale.

Q12. D'après Q8, la quantité d'ion iodate présent dans la solution est :  $n(\text{IO}_3^-)_{\text{initial}} = \frac{n(\text{I}_2)_{\text{introduit}}}{3} = \frac{C_1 V_1}{3}$

L'ion iodate est partiellement consommée par la réaction (1). A la fin de cette étape, il reste :

$$n(\text{IO}_3^-)_{\text{restant}} = n(\text{IO}_3^-)_{\text{initial}} - \xi_1 = \frac{C_1 V_1}{3} - \frac{n_{\text{gluc}}}{3}$$

D'après la réaction (2), la quantité de diiode formée vaut :  $n(\text{I}_2)_{\text{formé}} = 3 n(\text{IO}_3^-)_{\text{restant}} = C_1 V_1 - n_{\text{gluc}}$

Par ailleurs en tenant compte de la dilution, à l'opération 3, on a introduit :  $n_{\text{gluc}} = \frac{C_0 V_2}{10}$

Enfin, la réaction (3) correspond à la réaction de dosage. Or à l'équivalence d'un dosage, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques, d'où :

$$\frac{n(\text{I}_2)_{\text{formé}}}{1} = \frac{n(\text{S}_2\text{O}_3^{2-})_{\text{versé à équivalence}}}{2} \Leftrightarrow n(\text{I}_2)_{\text{formé}} = \frac{C_3 V_{\text{éq}}}{2}$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{C_3 V_{\text{éq}}}{2} = C_1 V_1 - \frac{C_0 V_2}{10} \Leftrightarrow \boxed{C_0 = \frac{10}{V_2} \left( C_1 V_1 - \frac{C_3 V_{\text{éq}}}{2} \right)}$$

Q13. Pour que ce dosage soit valide, il faut que l'ion iodate soit effectivement en excès à la réaction (1) (voir Q9). Ainsi, il faut que :

$$C_1 V_1 > n_{\text{gluc}} \Leftrightarrow \boxed{C_1 V_1 > \frac{C_0 V_2}{10}}$$