

## CB 2026 Modélisation - Physique-Chimie

PSI - Lycée du Parc des Loges

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

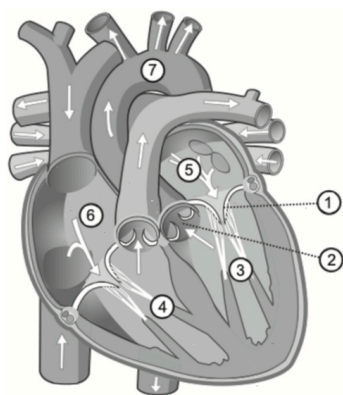
Les calculatrices sont autorisées

Durée 2H

### Modélisation d'une pompe d'assistance cardiaque

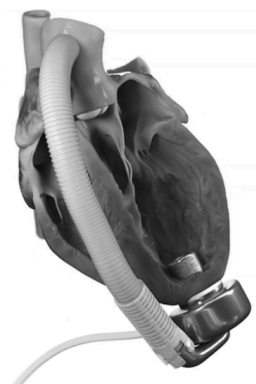
Dans ce sujet, une nouvelle génération de pompe VAD intra-péricardiale (qui est directement intégrée au cœur du patient) est étudiée. Développée par la société française *Corwave*, cette pompe est implantée sur le ventricule gauche (dispositif représenté **figure 2**), et permet d'apporter la puissance hydraulique supplémentaire qui manque au cœur défaillant.

Le produit est décrit sur le site suivant : <https://www.corwave.com/fr/product/corwave-lvad/>



**Figure 1** - Schéma du cœur humain  
Légende :

- |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| ① : Valve mitrale     | ⑤ : Oreillette gauche |
| ② : Valve aortique    | ⑥ : Oreillette droite |
| ③ : Ventricule gauche | ⑦ : Aorte             |
| ④ : Ventricule droit  |                       |



**Figure 2** - Implantation du VAD de la société *Corwave* sur le ventricule gauche

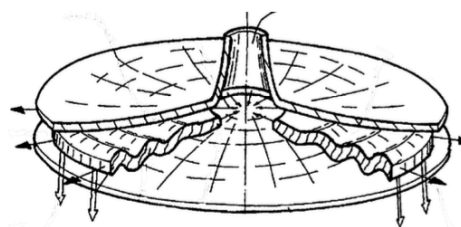
### Hypothèses générales

L'étude traitera uniquement du cas d'un individu au repos. La fréquence cardiaque au repos d'un individu sain est de  $f = 60 \text{ batt}\cdot\text{min}^{-1}$  pour un débit moyen en sang de  $q = 5 \text{ L}\cdot\text{min}^{-1}$  ( $1 \text{ batt}\cdot\text{min}^{-1} = 1 \text{ battement par minute}$ ).

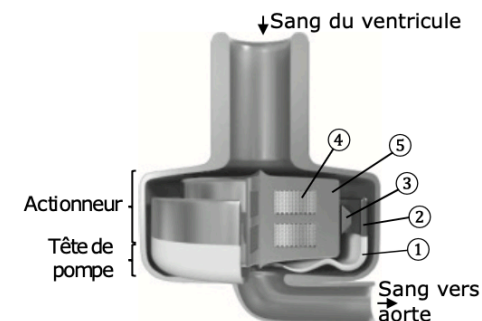
### Présentation de la pompe *Corwave* et de ses exigences

La pompe actuellement développée par la société française *Corwave* tente de répondre à ces problématiques en s'appuyant sur une technologie à base de membrane vibrante inspirée du mouvement de certains animaux marins (**figure 6**).

Cette technologie permet ainsi de délivrer un débit aussi bien pulsatile que continu : en l'absence d'inertie de pièces en rotation (indispensables dans d'autres technologies), le point de fonctionnement de la pompe peut être changé en moins d'une oscillation.



**Figure 6** - Membrane vibrante brevetée par *Corwave*



**Figure 7** - Schéma en coupe du LVAD de l'entreprise *Corwave*

Le schéma 3D (**figure 7**) ainsi que le diagramme de bloc interne (**figure 8**) de la pompe présentent sa structure. La membrane ① est directement moulée sur sa fixation ②. Le rôle de cette fixation est de transmettre les efforts depuis la partie mobile de l'actionneur jusqu'à la membrane. L'actionneur est constitué d'une couronne magnétique mobile ③ qui entoure un stator constitué de deux bobines ④ et d'un noyau ferromagnétique ⑤ qui canalise le champ magnétique créé par les bobines.

Une paire de ressorts circulaires, non représentée sur le schéma, assure le centrage de l'aimant et de la membrane autour de l'axe de la pompe et fournit une force de rappel qui maintient l'aimant autour d'une position de repos.

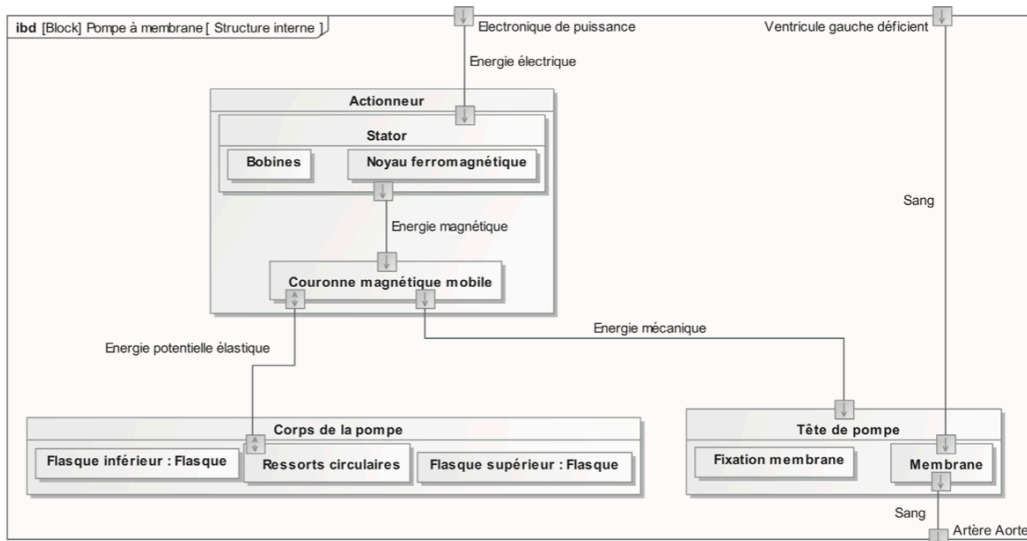
L'ensemble des deux bobines est monté en série et connecté à un système d'électronique de puissance par un câble électrique. Comme le mouvement de la pompe est périodique, le courant continu des batteries doit être converti en courant alternatif.

Le sang, pompé depuis le ventricule gauche déficient, passe de chaque côté de la membrane. Il est alors expulsé par la membrane dans l'artère aorte.

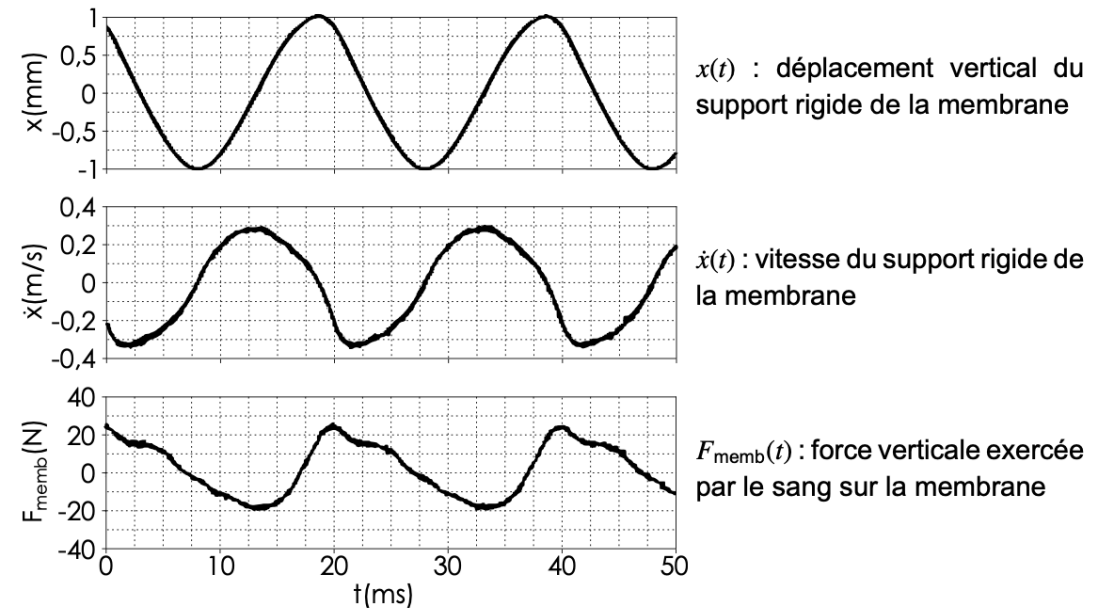
## II.2 - Modélisation de la force exercée par le fluide sur la membrane

Pour connaître l'effort d'induction de l'actionneur, ainsi que la puissance d'appoint fournie par la pompe, il faut déterminer la force  $F_{\text{memb}}$  qu'exerce sur la membrane le sang éjecté au débit voulu pour combler l'insuffisance cardiaque. C'est l'objet de cette sous-partie.

Les essais sur banc permettent de déterminer la courbe réelle d'évolution de  $F_{\text{memb}}$  au cours du temps. Ces résultats sont représentés **figure 12** pour une fréquence d'excitation de la membrane de  $f_p = f_{pm} = 50$  Hz. La puissance moyenne hydraulique mesurée en sortie de pompe au cours des essais correspond à la puissance  $\mathcal{P}_{\text{hydro}} = 0,3$  W voulue.



**Figure 8** - Diagramme de blocs internes de la pompe à membrane Corwave



**Figure 12** - Résultats expérimentaux

Une dépendance de la force  $F_{\text{memb}}$  à la vitesse d'excitation de la membrane est observée expérimentalement. Une modélisation prenant en compte les phénomènes dissipatifs liés à l'écoulement du sang dans la pompe est alors proposée. La force exercée par le fluide sur la membrane est ainsi modélisée par l'expression  $F_{\text{memb}} = -h\dot{x}$ , où  $x(t)$  correspond au déplacement vertical du support rigide de la membrane au cours du temps autour de sa position d'équilibre au point  $O$  (**figure 13**) et  $\dot{x}$  la dérivée temporelle de  $x$ .

**Q11.** En exploitant les courbes sur la **figure 12**, proposer une valeur numérique pour  $h$  en expliquant la démarche retenue. Le relevé des points sera borné à l'intervalle de temps [2,5 ms ; 17,5 ms]. Proposer, en expliquant la démarche retenue, une valeur numérique de  $h$  en précisant son unité.

**Q12.** En supposant que  $x(t)$  soit une fonction sinusoïdale  $x(t) = X_0 \cos(2\pi f_{pm} t + \varphi)$ , déterminer l'expression de  $\mathcal{P}_{meca}(t)$  correspondant à la puissance instantanée transmise par la membrane au sang pour une fréquence de fonctionnement de la pompe  $f_{pm} = 50$  Hz, en fonction de  $f_{pm}$ ,  $\varphi$ ,  $X_0$  et de  $h$ . Exprimer alors  $\mathcal{P}_{moy} = \langle \mathcal{P}_{meca}(t) \rangle$  sur une période correspondant à un battement de cœur, en fonction de  $f_{pm}$ ,  $X_0$  et de  $h$ . Réaliser l'application numérique, avec  $X_0 = 1$  mm et  $h = 65$  USI.

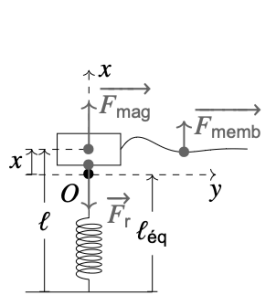
**Q13.** Quel phénomène dissipatif peut justifier la différence entre la puissance mécanique  $\mathcal{P}_{moy}$  transmise par la membrane au sang et la puissance hydraulique  $\mathcal{P}_{hydro} = 0,3$  W mesurée en sortie de pompe ? En déduire le rendement hydraulique  $r_{hydro}$  de la pompe.

### II.3 - Détermination de l'effort d'induction nécessaire

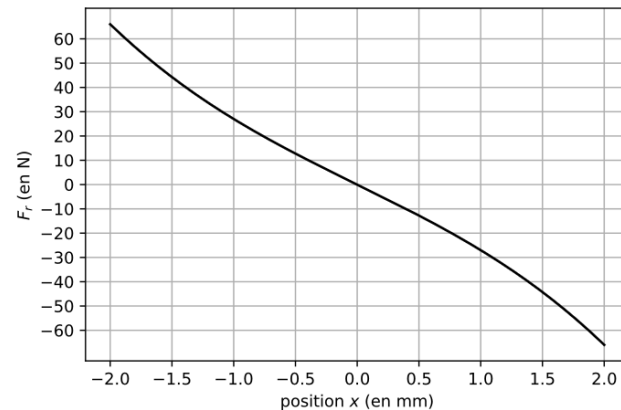
L'objectif de cette sous-partie est de déterminer, par une étude mécanique, la force d'induction  $\vec{F}_{mag} = F_{mag}(t) \vec{u}_x$  nécessaire pour faire osciller la couronne magnétique et la membrane. Seules les composantes verticales de ces forces seront prises en compte, dans la mesure où le guidage en translation assure une trajectoire unidimensionnelle pour l'ensemble du système en mouvement.

Il est nécessaire de déterminer dans un premier temps la force que doit exercer la membrane sur le fluide.

Le système constitué de la couronne magnétique (notée ③ sur la **figure 7**) attachée à la membrane en silicone, notée ①, est modélisé par un système masse-ressort de masse en mouvement  $m = 6,0$  g (**figure 13**). Le ressort exerce une force  $\vec{F}_r = F_r(x) \vec{u}_x$  sur le système ( $x = \ell - \ell_{eq}$  étant l'allongement du ressort par rapport à sa longueur d'équilibre  $\ell_{eq}$ ) et le fluide exerce une force  $\vec{F}_{memb} = -h\dot{x} \vec{u}_x$  sur la membrane, avec  $h = 65$  USI.



**Figure 13** - Système oscillant



**Figure 14** - Force de rappel du ressort

**Q14.** En notant  $\ell_0$  la longueur à vide du ressort, exprimer sa longueur  $\ell_{eq}$  à l'équilibre, en l'absence d'excitation magnétique, en fonction de  $\ell_0$ ,  $m$ ,  $k$  et de l'accélération de la pesanteur  $g$ .

Le système est désormais étudié par rapport à sa position d'équilibre (en  $O$ ) repérée par l'abscisse  $x$ .

**Q15.** La force exercée par le ressort sur le système est représentée **figure 14**. Proposer un modèle linéaire de cette force sur la plage  $x \in [-1,0$  mm ;  $+1,0$  mm] pour l'exprimer sous la forme  $F_r(x) = -kx$  en précisant la valeur numérique de  $k$  en  $N \cdot mm^{-1}$ .

L'excitation sera considérée harmonique, de la forme  $F_{mag}(t) = F_0 \cos(\omega t)$  (avec  $\omega$  la pulsation de l'excitation) et la forme des oscillations de la couronne magnétique, modélisées par la fonction harmonique  $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$ , sera étudiée.

**Q16.** Montrer que la fonction de transfert du système oscillant peut s'écrire sous la forme de la formule (3)

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{x(j\omega)}{F_{mag}(j\omega)} = \frac{H_0}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2} \quad (3)$$

avec  $j^2 = -1$  et où les expressions de  $H_0$ ,  $\xi$  et  $\omega_0$  sont à détailler en fonction de  $h$ ,  $k$  et de  $m$ .

**Q17.** Exprimer le gain en décibels  $G_{dB}(\omega)$  et la phase  $\Phi(\omega)$  de la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  en fonction de  $H_0$ ,  $\xi$ ,  $\omega$  et de  $\omega_0$ .

Les données suivantes seront utilisées pour la suite du sujet :

- un gain statique  $H_0 = 4,0 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{N}^{-1}$  ;
- une fréquence propre de  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 340$  Hz ;
- un facteur d'amortissement  $\xi = 2,5$ .

Le diagramme de Bode du système est tracé **figure 15**.

**Q18.** Préciser la valeur des pentes non nulles observées dans le diagramme de Bode en gain (**figure 15**) en spécifiant la plage de fréquences associée.

**Q19.** La plage de fréquences d'oscillations de la membrane (de 40 Hz à 70 Hz) est-elle en accord avec la bande passante à  $-3$  dB du système masse-ressort ainsi modélisé ?

**Q20.** En cherchant l'effort d'induction  $F_{mag}$  sous la forme  $F_{mag} = F_0 \cos(\omega t)$ , préciser la valeur numérique de l'amplitude  $F_0$  de la force d'induction nécessaire pour obtenir des oscillations du système vibrant d'amplitude  $X_0 = 1,0$  mm.

Pour la suite, afin de garantir une marge de sécurité suffisante, l'actionneur devra être capable de produire une force magnétique  $F_{mag}$  d'amplitude minimale  $F_{0m} = 50$  N.

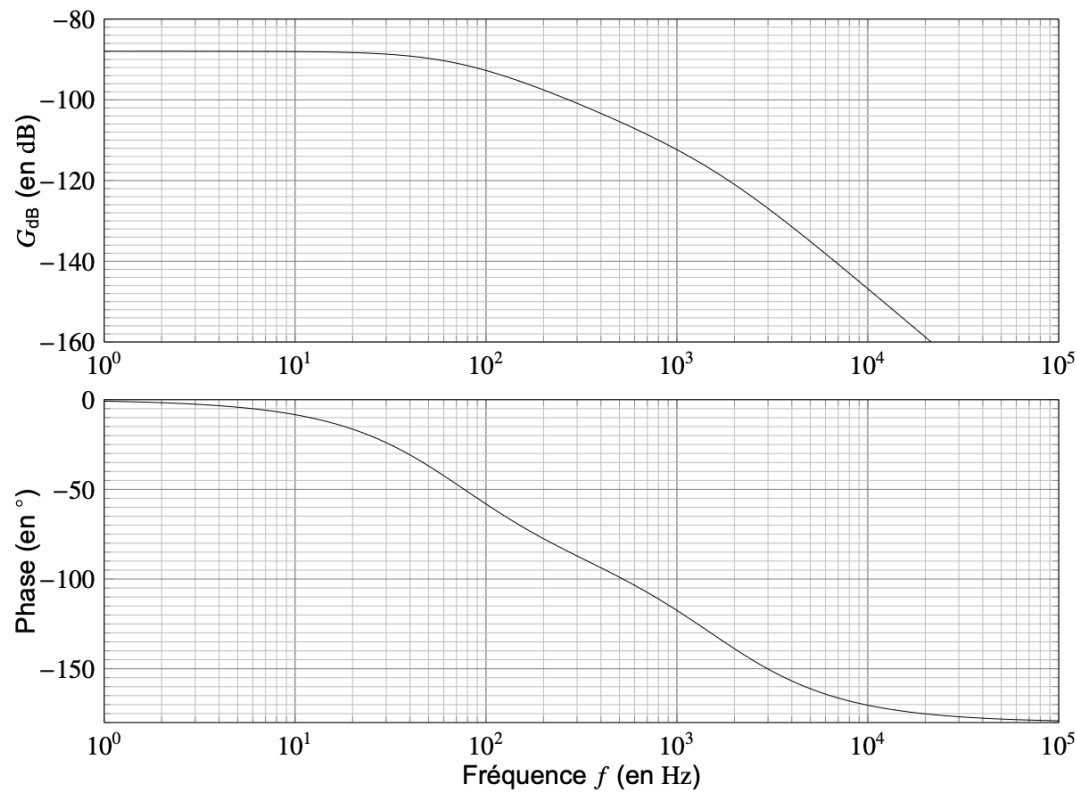


Figure 15 - Diagramme de Bode de la fonction de transfert du système oscillant

#### II.4 - Dimensionnement du courant nécessaire en pic de puissance

L'objectif de cette sous-partie est de dimensionner l'actionneur électromagnétique et de déterminer l'intensité d'alimentation nécessaire pour qu'il soit capable de générer la force magnétique déterminée précédemment.

Dans cette sous-partie, les calculs sont réalisés dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires. L'expression du champ magnétique créé par les distributions de courants et de moments magnétiques sera supposée identique à l'expression du champ magnétostatique.

#### Modélisation du champ magnétique créé par la couronne magnétique

Dans cette section, la couronne magnétique (notée ③ sur la figure 7) soumise à des efforts d'induction permettant la vibration de la membrane, notée ①, sera l'objet de l'étude.

La couronne magnétique (figure 16) a une forme torique, de section carrée d'épaisseur  $\varepsilon = 2,0$  mm. Le rayon intérieur de la couronne est noté  $R_c = 20,0$  mm. Le matériau composant cet anneau est un alliage à base de fer conservant une aimantation rémanente lui conférant les propriétés magnétiques d'un aimant permanent.

Un alliage, le  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ , à base de néodyme (Nd), de fer (Fe) et de bore (B), est utilisé depuis les années 90 et permet de réaliser un matériau avec une aimantation rémanente 3 à 10 fois supérieure à celle d'un aimant de ferrite de même masse.

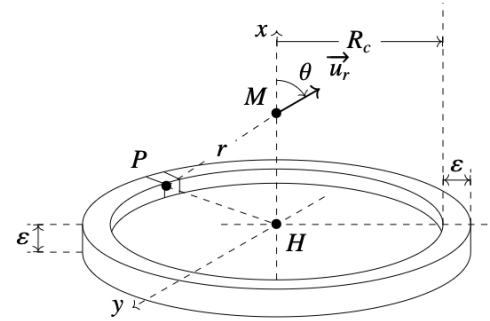


Figure 16 - Couronne magnétique

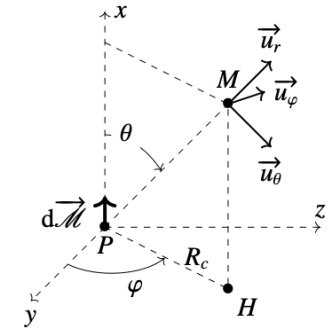


Figure 17 - Moment magnétique  $d\vec{\mathcal{M}}$

L'aimantation  $\vec{J}$  du matériau est définie comme étant la densité de moment magnétique  $d\vec{\mathcal{M}}$  (figure 17) par élément de volume  $dV$  du matériau :

$$\vec{J} = \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dV}. \quad (4)$$

Pour l'alliage  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ , l'aimantation du milieu est  $J = \|\vec{J}\| = 1,0 \cdot 10^7 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ .

**Q21.** En supposant une répartition homogène de l'aimantation dans le matériau, en déduire à l'aide de la formule (4) la valeur du moment dipolaire magnétique  $\mathcal{M}$  de la couronne magnétique. L'hypothèse  $\varepsilon \ll R_c$  sera faite (dans les calculs et les expressions) pour faciliter les calculs dans cette question et pour la suite.

La modélisation de la couronne magnétique avec une répartition homogène de l'aimantation du matériau permet de déterminer l'expression du champ magnétique en un point de l'axe de révolution de l'anneau.

Le champ magnétique  $d\vec{B}(M)$  créé par un moment magnétique  $d\vec{\mathcal{M}}$  a pour expression :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi r^3} \left( 3 \frac{d\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} - d\vec{\mathcal{M}} \right)$$

avec  $PH = R_c$ ,  $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ ,  $r = \|\vec{r}\|$ ,  $\overrightarrow{HM} = x \vec{u}_x$  et  $\mu_r$  la perméabilité magnétique relative du milieu où se situe le point  $M$ . Si on considère le champ magnétique dans le noyau ferromagnétique du stator ⑤ de la figure 7 alors  $\mu_r = 50$ , sinon  $\mu_r = 1$ .

Dans la mesure où  $\varepsilon \ll R_c$ , la couronne magnétique est modélisée par une distribution linéique de moment magnétique dont chaque élément de longueur  $d\ell = R_c d\theta$  a un moment magnétique  $d\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_\ell d\ell \vec{u}_x$ .

$$d\ell = R_c d\theta$$

**Q22.** Identifier l'expression de  $\mathcal{M}_\ell$  en fonction de  $\mathcal{M}$  et de  $R_c$ .

**Q23.** Montrer que la composante axiale du champ magnétique peut être exprimée sous la forme :

$$dB_x = d\vec{B}(M) \cdot \vec{u}_x = \frac{2\eta - 1}{(\eta + 1)^{\frac{5}{2}}} dB_0 \text{ avec } \eta = \left(\frac{x}{R_c}\right)^2$$

où l'expression de  $dB_0$  est à préciser en fonction de  $\mu_0, \mu_r, R_c$  et de  $d\mathcal{M} = \|d\vec{\mathcal{M}}\|$ .

Seul ce champ magnétique axial sera considéré pour la suite, le champ magnétique radial étant négligé devant le champ magnétique axial.

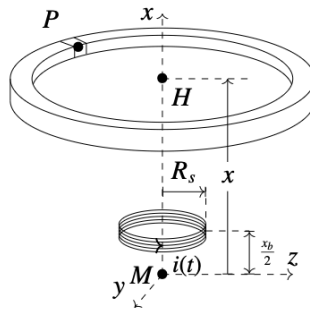
**Q24.** Montrer que le champ magnétique axial  $B_x(\eta)$  créé par la couronne en un point  $M$  situé sur l'axe de la couronne magnétique peut s'écrire :

$$B_x(\eta) \rightarrow \vec{B}_0(\eta) = B_0 \frac{2\eta - 1}{(1 + \eta)^{\frac{5}{2}}} \vec{u}_x$$

où l'expression de  $B_0$  est à préciser en fonction de  $\mu_0, \mu_r, \mathcal{M}$  et de  $R_c$ .

### Effort d'induction créé par un ensemble de $N_s$ spires de courant

Un ensemble de  $N_s = 200$  spires jointives de rayon moyen  $R_s = 10,0$  mm, parcourues par un courant  $i(t)$ , est placé à une altitude  $\frac{x_b}{2}$  au dessus du point  $M$ . L'ensemble de ces bobines est soumis à un champ magnétique dont l'expression est identique à celle établie sur l'axe ( $Hx$ ). L'ensemble est représenté **figure 18**.



**Figure 18** - Spire de courant dans un champ magnétique

Lors du déplacement de la couronne, la position de la bobine sera repérée en fonction de  $x$  et de  $x_b/2$ .

**Q25.** Préciser l'expression du moment magnétique  $\mathcal{M}_s(t)$  créé par l'ensemble des  $N_s$  spires de rayon  $R_s$  parcourues par une intensité électrique  $i(t)$ .

Pour rappel, la force magnétique  $\vec{F}$  s'exerçant sur un moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}_s$  plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  a pour expression :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(-\vec{\mathcal{M}}_s \cdot \vec{B}).$$

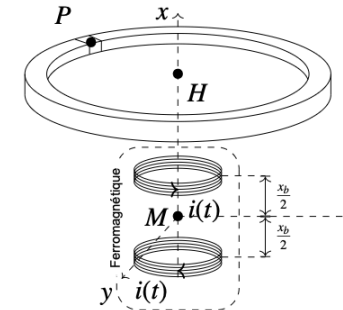
$\mathcal{E} = -\vec{\mathcal{M}}_s \cdot \vec{B}$  est l'énergie potentielle d'interaction du moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}_s$  avec le champ magnétique extérieur  $\vec{B}$ .

**Q26.** Exprimer l'énergie potentielle d'interaction  $\mathcal{E}_1(x, i)$  de l'ensemble de  $N_s$  spires de courant avec la couronne magnétique en fonction de  $B_0$  défini précédemment,  $\mathcal{M}_s, i(t)$  et

de  $(x - x_b/2)$  et de  $R_c$ .

### Effort d'induction créé par les deux ensembles de $N_s$ spires sur la couronne

Un deuxième ensemble de  $N_s$  spires (**figure 19**) est disposé en dessous de  $M$ , à une altitude  $-\frac{x_b}{2}$  (telle que  $x_b = 10,0$  mm). Ces  $N_s$  spires sont parcourues par un courant d'intensité  $i(t)$  identique au premier ensemble mais de sens contraire.



**Figure 19** - Modèle de l'actionneur à deux ensembles de spires

Dans cette section, il est demandé de traiter le problème numériquement pour déterminer l'allure de la force magnétique créée par les deux spires de courant sur la couronne magnétique en fonction de sa position  $x$ . Pour cela, le programme *Python* ci-après est utilisé.

```

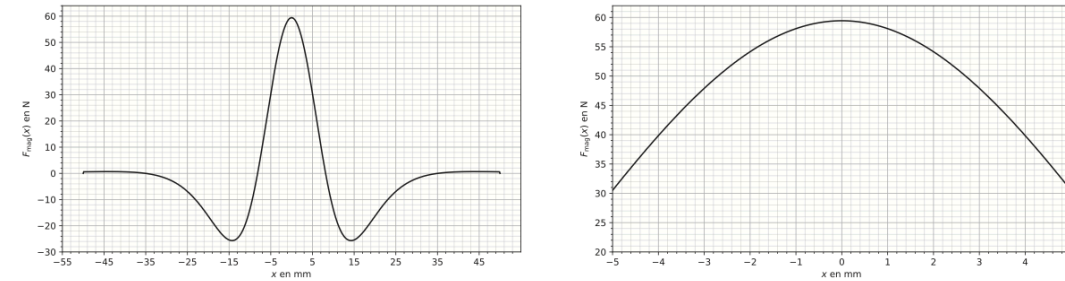
1 Rc = 20e-3 # rayon de la couronne magnétique (en m)
2 epsilon = 2e-3 # épaisseur de l'aimant (en m)
3 Rs = 10e-3 # rayon de la spire (en m)
4 Ns = 200 # nombre de spires
5 xb = 10e-3 # distance entre les deux ensembles de spires (en m)
6 Aim = 1.0e7 # aimantation (en A/m)
7 Vol = np.pi*((Rc+epsilon)**2-Rc**2)*epsilon # volume de l'aimant (
  en m**3)
8
9 # expression à déterminer :
10 M = ----- # moment magnétique (en A.m**2)
11 mu0 = 4*np.pi *1e-7 # perméabilité magnétique du vide en H/m
12 mur = 50 # perméabilité magnétique relative du milieu
13
14 # expression à déterminer :
15 MI = ----- # moment magnétique linéique (en A.m)
16 i = 3.0 # intensité du courant (en A)
17
18 # expression à déterminer :
19 Ms = --- # moment magnétique de la spire (en A.m**2)
20
21 # expression à déterminer :
22 B0 = --- # constante
23 x = np.linspace(-5e-2,5e-2,1000) # positions sur l'axe de la spire
24
25 def B(eta) :
26     return B0*(2*eta-1)/(1+eta)**(5/2)
27
28 # expression à déterminer :
29 E = --- # énergie potentielle d'interaction de l'ensemble des deux
  bobines avec la couronne magnétique
30 Fmag = np.zeros(len(x))

```

**Q27.** L'expression de la fonction  $B_x(\eta)$  a été établie à la **Q24**. Compléter la ligne de commande de la ligne 29 pour déterminer la valeur en tout point  $x$  de l'énergie potentielle d'interaction  $\mathcal{E}(x)$  de l'ensemble des deux spires avec la couronne magnétique.

**Q28.** Proposer un algorithme de calcul de  $F_{\text{mag}}(x)$  à partir de  $\mathcal{E}(x)$  utilisant une boucle *for*.

L'affichage de la fonction  $F_{\text{mag}}$  est réalisé à l'aide de la bibliothèque *matplotlib.pyplot*. Le résultat correspondant à un courant de  $|i| = 3,0$  A circulant dans les deux bobines est donné sur la **figure 20**.



**Figure 20** - Force magnétique s'exerçant sur la couronne magnétique

**Q29.** La force magnétique  $F_{\text{mag}}$  résultant de l'interaction des bobines avec la couronne magnétique est-elle suffisante pour respecter la valeur calculée à la **Q20**? Est-il alors possible de valider la valeur maximale de l'intensité du courant retenue (*Exigence 17, figure 9*)? Justifier votre réponse.

Vous retrouverez en fin d'énoncé le diagramme d'exigence, fig 9.

**Q30.** Justifier que l'on puisse écrire  $F_{\text{mag}}(x, i) = K_f \cdot i$  sur la plage d'oscillations de la membrane. Préciser la valeur numérique et l'unité du coefficient  $K_f$ .

