

## CCINP 2023 PSI

### Modélisation d'une pompe d'assistance cardiaque

#### II.2 - Modélisation de la force exercée par le fluide sur la membrane

**Q11** On cherche une relation de la forme  $F_{memb} = -h\dot{x}$  qui corresponde aux courbes  $F_{memb}(t)$  et  $\dot{x}(t)$  grossièrement en opposition de phase. En exploitant le maximum de  $\dot{x}(t)$  à  $t = 13ms$ ,

$$h = \frac{-F_{memb}(t = 13ms)}{\dot{x}(t = 13ms)} \approx \frac{20}{0,28} \approx 70 N.s.m^{-1}, \text{ cohérent avec la valeur } h = 65 \text{ USI en Q12.}$$

**Q12** La force exercée par la membrane sur le fluide est  $-\vec{F}_{memb}$  (actions réciproques).

De  $x(t) = X_0 \cos(2\pi f_{pm}t + \varphi)$  on déduit  $\dot{x}(t) = -2\pi f_{pm} X_0 \sin(2\pi f_{pm}t + \varphi)$ .

La puissance de la force exercée par la membrane est donc

$$P_{méca}(t) = -\vec{F}_{memb} \cdot \dot{x}(t) \vec{e}_x = +h\dot{x}^2(t) = +h(2\pi f_{pm} X_0)^2 \sin^2(2\pi f_{pm}t + \varphi).$$

La puissance moyenne est alors  $P_{moy} = \langle P_{méca}(t) \rangle = 2h\pi^2 f_{pm}^2 X_0^2$ .

A.N.  $P_{moy} = 2 \times 65 \times 10 \times 2500 \times 10^{-6} = 65 \times 5 \times 10^{-2} = 3,25 \approx 3W$  (1 chiffre significatif)

**Q13** La viscosité du sang peut expliquer que l'on mesure seulement une puissance

$P_{hydro} = 0,3W$  en sortie de la pompe, ce qui correspond à un rendement

$$r_{hydro} = P_{hydro} / P_{moy} \text{ de } 10\%.$$

#### II.3 - Détermination de l'effort d'induction nécessaire

**Q14 NB** La raideur  $k$  n'est définie qu'à la question suivante

La force de rappel du ressort s'exprime comme  $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x$ .

A l'équilibre du système constitué par la masse dans le référentiel de la pompe supposé galiléen,  $\vec{F}_r + m\vec{g} = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x - mg \vec{e}_x = \vec{0}$ , d'où  $\ell_{eq} = \ell_0 - mg/k$ .

**Q15** La pente lue en assimilant la courbe de la figure 14 à une droite dans l'intervalle  $[-1mm; +1mm]$  donne  $k = \frac{25}{1} = 25 N.mm^{-1}$ .

**Q16** En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel de la pompe supposé galiléen :

$m\ddot{x} \vec{e}_x = \vec{F}_{memb} + \vec{F}_r + m\vec{g} + \vec{F}_{mag}$  soit après projection sur  $\vec{e}_x$  et simplification :

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_{mag}$$

En notation complexe,  $(-m\omega^2 + j\omega h + k)\underline{x} = \underline{F}_{mag}$  avec  $\underline{x}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \phi)}$  et  $\underline{F}_{mag}(t) = F_0 e^{j\omega t}$ .

On en déduit la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{x}}{\underline{F}_{mag}} = \frac{1}{k + j\omega h - m\omega^2} = \frac{1/k}{1 + j\omega h/k - (m/k)\omega^2}$

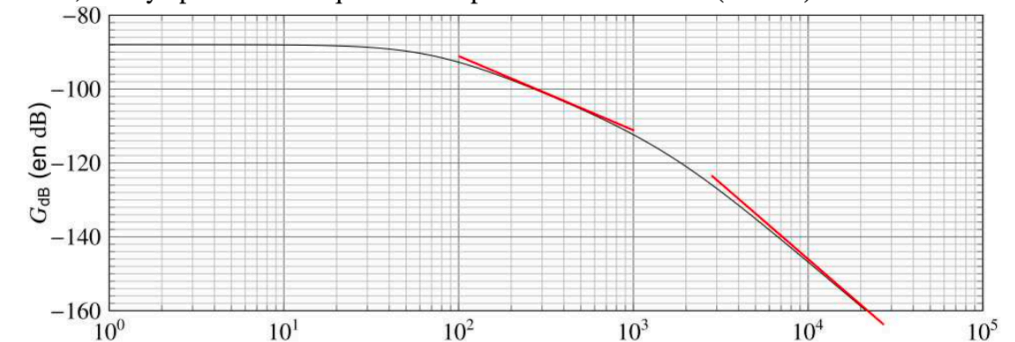
On passe à la forme canonique  $H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$

en posant  $H_0 = 1/k$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $\xi = \frac{h\omega_0}{2k} = \frac{h}{2\sqrt{km}}$ .

$$\mathbf{Q17} \quad G_{dB}(\omega) = 20 \log(H_0) - 10 \log\left[\left(1 - \omega^2 / \omega_0^2\right)^2 + 4\xi^2 \omega^2 / \omega_0^2\right]$$

$$\Phi(\omega) = \arg(H_0) - \arg\left[1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}\right] = -\arccos \frac{1 - \omega^2 / \omega_0^2}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 / \omega_0^2\right)^2 + 4\xi^2 \omega^2 / \omega_0^2}} \in [-\pi; 0].$$

**Q18** La courbe  $G_{dB}(\omega)$  est assimilable à une droite de pente -20dB/décade entre 100Hz et 1kHz, et l'asymptote haute fréquence a une pente de -40dB/décade ( $f > 3kHz$ ).



**Q19** On lit  $G_{dB}(f = 70\text{Hz}) = G_{dB\max} - 3\text{dB}$  : bande passante à -3dB du système est donc  $[0; 70\text{Hz}]$ . La plage de fréquence des oscillations de la membrane (40Hz à 70Hz) est donc dans la bande passante du système modélisé.

**Q20** L'amplitude de la force magnétique est  $F_0 = \frac{X_0}{|H(j\omega)|}$ .

L'amplitude nécessaire de la force est donc  $F_0 = \frac{X_0}{H_0} = \frac{10^{-3}}{4.10^{-4}} = 25\text{N}$  à très basse fréquence.

Mais le gain est le plus faible à 70Hz et vaut  $H_0 / \sqrt{2}$ . L'amplitude nécessaire de la force est

alors  $F_0 = \frac{X_0}{H_0 / \sqrt{2}} = \frac{10^{-3} \sqrt{2}}{4.10^{-4}} \approx 35\text{N}$  à 70Hz.

C'est cohérent avec la marge de sécurité qui prévoit une force pouvant atteindre 50N.

#### II.4 - Dimensionnement du courant nécessaire en pic de puissance

Curieux de noter l'aimantation  $J$ . Mais distinguer plusieurs graphies de la lettre  $M$  est aussi difficile...

**Q21** L'aimantation a partout même orientation et même sens.

$\mathcal{M} = J \times 2\pi R_c \varepsilon^2$  en approximant le volume de la couronne par  $2\pi R_c \varepsilon^2$ .  $\mathcal{M} = 5,0\text{A.m}^2$

**Q22** Maladresse de l'énoncé : sur les figures 16 et 17,  $\theta$  est le premier angle des coordonnées sphériques. Mais dans la formule  $d\ell = R_c d\theta$  donnée juste avant Q22, c'est l'angle des coordonnées cylindriques .... qui correspond au  $\varphi$  des coordonnées sphériques.

$\mathcal{M}_\ell$  est le moment magnétique par unité de longueur de la couronne, donc

$$\mathcal{M}_\ell = \frac{\mathcal{M}}{2\pi R_c} (= J \varepsilon^2).$$

**Q23** On reprend l'expression du champ magnétique créé par  $d\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_\ell d\ell \vec{u}_x$

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi r^3} \left( 3 \frac{\mathcal{M}_\ell d\ell \vec{u}_x \cdot \vec{r}}{r} - \mathcal{M}_\ell d\ell \vec{u}_x \right) \text{ avec } r^2 = R_c^2 + x^2$$

$$\vec{dB}(M) \cdot \vec{u}_x = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi (R_c^2 + x^2)^{3/2}} \left( 3 \frac{\mathcal{M}_\ell d\ell x}{R_c^2 + x^2} - \mathcal{M}_\ell d\ell \right) = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M}_\ell d\ell}{4\pi (R_c^2 + x^2)^{3/2}} \left( 3 \frac{x^2}{R_c^2 + x^2} - 1 \right)$$

En posant  $\eta = \frac{x^2}{R_c^2}$ , il vient  $\vec{dB}(M) \cdot \vec{u}_x = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M}_\ell d\ell}{4\pi R_c^3 (1+\eta)^{3/2}} \left( 3 \frac{\eta}{1+\eta} - 1 \right) = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M}_\ell d\ell}{4\pi R_c^3 (1+\eta)^{3/2}} \left( \frac{2\eta-1}{1+\eta} \right)$

$$dB_x = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M}_\ell d\ell}{4\pi R_c^3} \frac{2\eta-1}{(1+\eta)^{5/2}} \text{ de la forme } dB_x = dB_0 \frac{2\eta-1}{(1+\eta)^{5/2}} \text{ avec}$$

$$dB_0 = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M}_\ell d\ell}{4\pi R_c^3} = \frac{\mu_0 \mu_r d\mathcal{M}}{4\pi R_c^3}$$

**Q24** Coquille de l'énoncé : on parle d'un champ  $B_x(\eta)$  mais la formule donne  $\vec{B}_0(\eta)$ , au lieu de  $\vec{B}_x(\eta)$ . En additionnant les contributions sur le tour de la couronne.

$$\vec{B}_x(\eta) = \oint_{\text{couronne}} dB_0 \frac{2\eta-1}{(1+\eta)^{5/2}} \vec{u}_x = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M}_\ell 2\pi R_c}{4\pi R_c^3} \frac{2\eta-1}{(1+\eta)^{5/2}} \vec{u}_x = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M}}{4\pi R_c^3} \frac{2\eta-1}{(1+\eta)^{5/2}} \vec{u}_x = B_0 \frac{2\eta-1}{(1+\eta)^{5/2}} \vec{u}_x$$

avec  $B_0 = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M}}{4\pi R_c^3}$ . N.B.: Au centre de la couronne, le champ magnétique est selon  $-\vec{u}_x$ .

**Q25** Par définition,  $\mathcal{M}_s = N_s \pi R_s^2 i(t)$ . Plus précisément  $\vec{\mathcal{M}}_s = N_s \pi R_s^2 i(t) \vec{u}_x$ .

**Q26** On obtient le champ créé par la couronne au centre des spires en remplaçant la valeur

$$\eta = \frac{x^2}{R_c^2} \text{ par } \eta = \frac{(x_M + x_b / 2)^2}{R_c^2} = \frac{(x + x_b / 2)^2}{R_c^2} \text{ dans } \vec{B}(\eta) = B_0 \frac{2\eta-1}{(1+\eta)^{5/2}} \vec{u}_x \text{ (Q24).}$$

**Q27** Le sens du courant est inversé dans la deuxième bobine, et on remplace  $\eta$  par

$$\frac{(x_M - x_b / 2)^2}{R_c^2} = \frac{(x - x_b / 2)^2}{R_c^2} = \gamma^2.$$

On utilise la fonction qui calcule le champ B(eta) :

$$E = -M_s * ( B((x+x_b/2)**2/Rc**2) - B((x-x_b/2)**2/Rc**2) )$$

NB Cette ligne exploite la structure des tableaux et la vectorisation de la fonction B(eta).

**Q28** Quand on écrit que la force est  $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\varepsilon) = -\frac{d\varepsilon}{dx_M} \vec{u}_x$ , il s'agit de la force exercée

par la couronne sur les spires. Si on veut, comme à la figure 20, la force sur la couronne, il

faut, d'après la loi des actions réciproques, calculer  $\vec{F}_{\text{mag}} = +\overrightarrow{\text{grad}}(\varepsilon) = +\frac{d\varepsilon}{dx_M} \vec{u}_x$ .

On approxime  $F(x_i) \approx \frac{\varepsilon(x_{i+1}) - \varepsilon(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$  :

for i in range(len(x)-1) :

$$F_{\text{mag}}(i) = (E(i+1) - E(i)) / (x(i+1) - x(i))$$

Fmag(len(x)-1) = F(len(x)-2)

NB Pour éviter un dépassement mais avoir un tableau de même longueur, on recopie en dernière place l'avant dernière valeur.

**Q29** Au concours on ne pouvait exploiter que la courbe de l'énoncé :

On doit avoir  $F_{mag} > 50N$  d'après le bas de la p13. C'est bien le cas dans l'intervalle

$x \in [-2,6mm; +2,6mm]$ , aussi compatible avec une amplitude  $X_0 = 1mm$ .

L'intervalle pour avoir  $F_{mag} > 35N$  calculée Q20 est encore plus large.

Ce graphe a été tracé avec l'intensité maximale de l'exigence 17, qui est suffisante. (En diminuant l'intensité, on diminue l'énergie d'interaction et la force).

**Q30**  $\varepsilon_1(x, i) = -\mathcal{M}_s \cdot B_0 \frac{2\gamma^2 - 1}{(1 + \gamma^2)^{5/2}}$  est proportionnelle à l'intensité  $i(t)$  car  $\mathcal{M}_s = N_s \pi R_s^2 i(t)$ .

De même pour l'énergie totale (même intensité dans les deux bobines). Donc la force obtenue en dérivant par rapport à  $x$  est aussi proportionnelle à  $i(t)$ , de la forme  $F_{mag}(x, i) = K_f(x)i(t)$

**Pb :** L'énoncé semble considérer  $K_f(x)$  comme une constante, ce qui est une bonne

approximation sur la plage d'oscillations  $x \in [-1mm; +1mm]$ .

En exploitant le maximum de la courbe Figure 20 :  $K_f(x=0) = 60/3 = 20N \cdot A^{-1}$

Annexe : code Python utilisé pour tracer la courbe

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

Rc = 20e-3 # rayon de la couronne magnétique (en m)
epsilon = 2e-3 # épaisseur de l'aimant (en m)
Rs = 10e-3 # rayon de la spire (en m)
Ns = 200 # nombre de spires
xb = 10e-3 # distance entre les deux ensembles de spires (en m)
Aim = 1.0e7 # aimantation ( en A/m)
Vol = 2*np.pi*Rc*epsilon**2 # volume de l'aimant (en m**3)
# expression à déterminer :
M = Aim*Vol # moment magnétique (en A.m**2)
mu0 = 4*np.pi*1e-7 # perméabilité magnétique du vide en H/m
mur = 50 # perméabilité magnétique relative du milieu
# expression à déterminer :
Ml = M/2/np.pi/Rc # moment magnétique linéique (en A.m)
i = 3.0 # intensité du courant (en A)
# expression à déterminer :
Ms = Ns*i*np.pi*Rs**2 # moment magnétique de la spire (en A.m**2)
# expression à déterminer :
B0 = mu0*mur*M/4/np.pi/Rc**3
x = np.linspace(-5e-2, 5e-2, 1000) # positions sur l'axe de la spire
```

```
def B(eta) :
    return B0*(2*eta-1)/(1+eta)**(5/2)

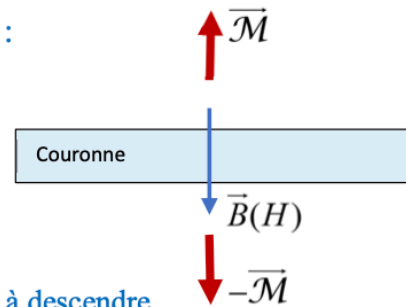
# expression à déterminer :
# énergie d'interaction de l'ensemble des deux bobines
# avec la couronne magnétique
E = -Ms*( B((x+xb/2)**2/Rc**2)-B((x-xb/2)**2/Rc**2))
plt.figure('Energie')
plt.plot(x*1e3, E)
plt.show()

Fmag=np.zeros(len(x))
for k in range(len(x)-1) :
    Fmag[k]=(E[k+1]-E[k])/(x[k+1]-x[k])
Fmag[len(x)-1]=Fmag[len(x)-2]
plt.figure('Fmag')
plt.plot(x*1e3, Fmag)
plt.show()

# variante avec le changement de variable de l'énoncé:
# énergie d'interaction de l'ensemble des deux bobines
# avec la couronne magnétique
E = -Ms*( B((x-xb/2)**2/Rc**2)-B((x+xb/2)**2/Rc**2))
plt.figure('Energie')
plt.plot(x*1e3, E)
plt.show()

Fmag=np.zeros(len(x))
for k in range(len(x)-1) :
    Fmag[k]=(E[k+1]-E[k])/(x[k]-x[k+1])
Fmag[len(x)-1]=Fmag[len(x)-2]
plt.figure('Fmag')
plt.plot(x*1e3, Fmag)
plt.show()
```

On trouve le graphe ci-contre. Par rapport à celui de la figure 20 de l'énoncé, le signe est inversé, et les valeurs sont deux fois plus fortes. Le signe négatif de la force en  $x=0$  est toutefois cohérent avec la configuration :



La couronne tend à descendre.

