

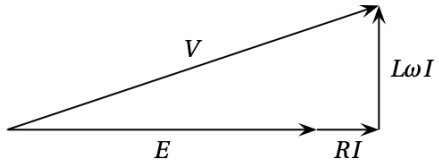
Mines PSI 2017

Sujet court à traiter pour exploiter la représentation de Fresnel d'une machine synchrone en génératrice

III.A. — Essais préalables

□ 16 – $f = 4 \times 1500 \div 60 = 100 \text{ Hz}$

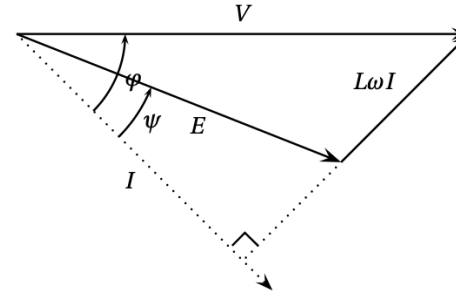
□ 17 – $E + RI = 62,5 \text{ V}; L\omega I = \sqrt{V^2 - (E + RI)^2} = 35 \text{ V}$, soit $L = 0,3 \text{ mH}$.



□ 18 – Φ_0 s'exprime en Wb et est la valeur efficace du flux du rotor dans un bobinage du stator. Elle dépend du bobinage du stator (section, nombre de spires), du champ créé par le rotor donc celui de l'aimant permanent. $E = \Phi_0 \omega = \Phi_0 p \Omega$ soit $A = p \Phi_0$.

Dans l'essai 1 à vide, $E = V$, $A = 0,36 \text{ Wb}$.

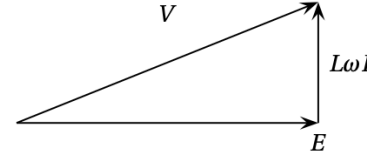
□ 19 – Les projections de V et E sur I sont identiques : $V \cos \varphi = E \cos \psi$.



□ 20 – $P = VI \cos \varphi = EI \cos \psi$. Il y a deux bobinages (introduction partie III, « assimilé à une machine synchrone diphasée ») et donc $P_m = 2P$.

□ 21 – $P_m = C\Omega$ soit $C = 2AI \cos \psi$. Pour maximiser le couple, on peut jouer sur l'angle ψ . Le couple est maxi pour $\psi = 0$ et vaut $C_{\max} = 2AI$. Le couple ne dépend que du courant comme dans le cas du moteur à courant continu.

□ 22 – $C = 111 \text{ Nm}$.



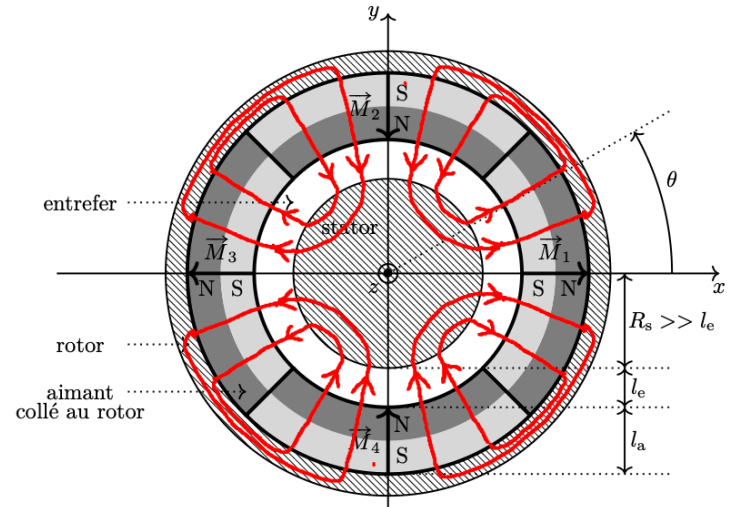
Par lecture du diagramme : $V = \sqrt{E^2 + (L\omega I)^2} = 64 \text{ V}$; $\tan \varphi = \frac{L\omega I}{E}$, soit $\varphi = 27^\circ$.

III - Le moteur roue synchrone et son pilotage

III.1 - Dimensionnement du moteur roue synchrone à aimants permanents

Q29) Les plans Oxz et Oyz sont des plans de symétrie pour les moments magnétiques $\vec{M}_{1,2,3,4}$. Il en va donc de même pour le champ magnétique créé par le rotor, dont les lignes de champ seront symétriques par rapport à ces plans.

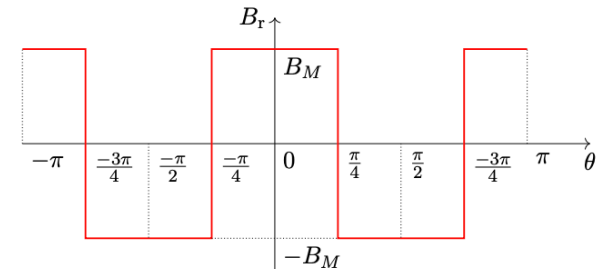
Les plans bissecteurs des plans précédents sont eux des plans d'antisymétrie des vecteurs $\vec{M}_{1,2,3,4}$, donc du champ magnétique dont les lignes de champ sont donc perpendiculaires à ces plans.



Q30) Le plan Oxz est plan de symétrie pour le champ magnétique donc $B_r(-\theta) = B_r(\theta)$: il s'agit d'une fonction paire de θ

Le plan Oyz est aussi plan de symétrie, donc $B_r(\pi - \theta) = B_r(\theta)$ et en utilisant la parité de B_r , $B_r(\theta - \pi) = B_r(\theta)$: $B_r(\theta)$ est π -périodique

Les plans $\theta = \pm\pi/4$ sont des plans d'antisymétrie pour le champ magnétique, donc $B_r(\pi/2 - \theta) = -B_r(\theta)$. En supposant $|B_r(\theta)| = B_M$ uniforme et en utilisant le tracé qualitatif des lignes de champ, $B_r(\theta)$ est une fonction créneau paire de période π , de valeur $B_r(0) = B_M$ et présentant des discontinuités en $\theta = \pi/4[\pi/2]$.



Q31) Dans la configuration $\theta_r = 0$, en se limitant au fondamental du développement en série de Fourier de $B_r(\theta)$, on peut écrire, en utilisant sa parité et sa période π , $B_r(\theta) = B_1 \cos(2\theta)$. Comme le champ dans l'entrefer est perpendiculaire à la surface du stator ferromagnétique, donc

radial, on peut donc écrire dans l'entrefer pour $\theta_r = 0$

$$\vec{B}_r(\theta) = B_1 \cos(2\theta) \vec{e}_r$$

Si le rotor tourne d'un angle θ_r autour de Oz , le champ magnétique subit une rotation d'une même angle (le stator est invariant par rotation autour de Oz) : Pour une valeur θ_r , on retrouve en tout point M d'angle θ le champ magnétique obtenu pour $\theta_r = 0$ au point M' d'angle $\theta - \theta_r$:

$$\vec{B}_r(\theta, t, \theta_r) = \vec{B}_r(\theta - \theta_r, t, 0) = B_1 \cos(2(\theta - \theta_r)) \vec{e}_r$$

Q32) L'énergie magnétique dans l'entrefer a pour expression

$$\mathcal{E}_{em} = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{(\vec{B}_r + \vec{B}_s)^2}{2\mu_0} dV = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{(\vec{B}_r + \vec{B}_s)^2}{2\mu_0} r dr d\theta dz$$

Le champ magnétique dépend que de la variable θ , donc on peut directement intégrer sur z , ce qui donne un facteur h et r , ce qui donne le facteur $[(R_s + l_e)^2 - R_s^2]/2 \approx R_s l_e$ car $l_e \ll R_s$. Par conséquent

$$\mathcal{E}_{em} = h R_s l_e \int_0^{2\pi} \frac{(\vec{B}_r + \vec{B}_s)^2}{2\mu_0} d\theta = \dots$$

$$\dots \frac{h R_s l_e}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} (B_1^2 \cos^2[2(\theta - \theta_r)] + B_0^2 \cos^2(p\theta - \omega t) + 2B_1 B_0 \cos[2(\theta - \theta_r)] \cos(p\theta - \omega t)) d\theta$$

On sépare les trois termes à intégrer

$$\int_0^{2\pi} \cos^2[2(\theta - \theta_r)] d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos[4(\theta - \theta_r)]}{2} d\theta = \pi + \frac{1}{8} [\sin[4(\theta - \theta_r)]]_0^{2\pi} = \pi$$

car $\sin[4(\theta - \theta_r)]$ est de période $\pi/2$, diviseur de 2π . De même

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(p\theta - \omega t) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos[2p(\theta - \omega t)]}{2} d\theta = \pi + \frac{1}{4p} [\sin[2p(\theta - \omega t)]]_0^{2\pi} = \pi$$

car $\sin[2p(\theta - \omega t)]$ est de période π/p , diviseur de 2π puisque p est entier. La linéarisation du terme croisé donne

$$\cos[2(\theta - \theta_r)] \cos(p\theta - \omega t) = \frac{1}{2} (\cos[(2+p)\theta - 2\theta_r - \omega t] + \cos[(2-p)\theta + \omega t - 2\theta_r])$$

Comme $2+p$ est un entier non nul, l'intégrale du premier cosinus donne s'annule. Si $2-p \neq 0$, il en va de même de la seconde intégrale, tandis que si $2-p=0$, la dépendance en θ du second cosinus disparaît, ce qui conduit à une valeur de l'intégrale égale à $\pi \cos(\omega t - 2\theta_r)$

Par conséquent, si $p \neq 2$

$$\mathcal{E}_{em} = \frac{\pi h R_s l_e}{2\mu_0} (B_1^2 + B_0^2) = \frac{V_e}{4\mu_0} (B_1^2 + B_0^2)$$

tandis que si $p = 2$

$$\mathcal{E}_{em} = \frac{V_e}{4\mu_0} (B_1^2 + B_0^2 + 2B_1 B_0 \cos(\omega t - 2\theta_r))$$

Pour que l'énergie magnétique dépende de la position θ_r du rotor, il faut choisir $p = 2$: le nombre de paires de bobines doit être égal au nombre de paires d'aimants.

Q33) On calcule alors le couple électromagnétique exercé sur le rotor :

$$\Gamma = \frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial \theta_r} = \frac{B_1 B_0 V_e}{\mu_0} \sin(\omega t - 2\theta_r)$$

Q34) Si $\theta_r = \Omega t - \alpha$, l'expression du couple devient

$$\Gamma = \frac{B_1 B_0 V_e}{\mu_0} \sin[(\omega - 2\Omega)t + 2\alpha]$$

Le couple moyen est non nul si $\Omega = \omega/2$: il s'agit de la condition de synchronisme, le facteur 2 provenant du nombre de paires d'aimants utilisés. Le couple moyen vaut alors

$$\Gamma = \frac{B_1 B_0 V_e}{\mu_0} \sin(2\alpha)$$

Comme $\Omega > 0$, ce couple est moteur si $0 < \alpha < \pi/2$, donc si le rotor est en retard sur le champ magnétique tournant du stator.

Q35) Le couple est maximal si $\alpha = \pi/4$ et vaut

$$\Gamma_{\max} = \frac{B_1 B_0 V_e}{\mu_0} = \frac{4B_M B_0 2\pi R_s l_e h}{\pi \mu_0} = \frac{8B_M B_0 R_s l_e h}{\mu_0}$$

L'énoncé donne $B_M = B_0 = 1,00 \text{ T}$, $R_s = 4,5 \text{ cm}$, $l_e = 0,7 \text{ mm}$, $h = 2 \text{ cm}$, d'où

$$\Gamma_{\max} = 4,0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Cette valeur est insuffisante pour répondre au cahier des charges.

En dehors d'une augmentation des normes des champs magnétique ou des dimensions du moteur (en particulier R_s et h , dans la mesure où augmenter l_e conduit pour une même intensité dans les bobines statoriques à diminuer le champ magnétique), on peut envisager d'augmenter le nombre de paires d'aimants. Cette influence n'est pas directement visible sur l'expression du champ, qui a été explicitement établie pour 2 paires d'aimants.

En présence de n paires d'aimants, la période spatiale du champ rotorique B_r vaut $2\pi/n$, soit en se limitant au premier harmonique

$$B_r = B_1 \cos[n(\theta - \theta_r)]$$

ce qui implique pour obtenir une énergie magnétique dans l'entrefer dépendant de θ_r un champ statorique de la forme

$$B_r = B_1 \cos(n\theta - \omega t)$$

L'expression de l'énergie magnétique est analogue à celle obtenue précédemment

$$\mathcal{E}_{em} = \frac{V_e}{4\mu_0} (B_1^2 + B_0^2 + 2B_1 B_0 \cos(\omega t - n\theta_r))$$

où le nombre de paires d'aimants apparaît explicitement. L'expression du couple devient

$$\Gamma(\theta_r) = \frac{n B_1 B_0 V_e}{2\mu_0} \sin(\omega t - n\theta_r)$$

Si $\theta_r = \Omega t - \alpha$, la condition de synchronisme devient $\Omega = \omega/n$ et la valeur moyenne du couple

$$\Gamma = \frac{nB_1 B_0 V_e}{2\mu_0} \sin(n\alpha)$$

On constate donc que le couple moyen est proportionnel au nombre n de paires de pôles. Si on ne modifie ni les dimensions du moteur, ni les amplitudes B_1 et B_M , le passage de 2 paires de pôles à la valeur maximale de 8 paires, le couple maximal est multiplié par 4 :

$$\Gamma_{\max} = 16 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Cette valeur reste insuffisante d'un facteur 3. Cependant la figure 15 montre que le rotor est couplé à un train épicycloïdal dont la sortie est liée à la roue. Il est ainsi possible d'augmenter le couple disponible sur la roue, en diminuant la vitesse (dans un modèle sans perte du train, la puissance $\Gamma\Omega$ est conservée entre l'entrée et la sortie du train). Il suffit d'utiliser un rapport de réduction en vitesse d'au moins 3 pour atteindre le couple maximal souhaité.

Centrale 1 PSI 2025

Partie C - Le générateur électrique

I - Paramètres de l'alternateur

Q25) Le circuit électrique du rotor est parcouru par un courant continu, qui crée un champ magnétique permanent. La rotation du rotor entraîne une variation du flux du champ créé par le rotor à travers les bobinages statoriques, d'où une force électromotrice sinusoïdale et en circuit fermé des courants statoriques sinusoïdaux.

Le rotor et le stator sont deux cylindres coaxiaux séparés par un entrefer. Le circuit rotorique est bobiné sur le rotor sous forme de spires dont les parties utiles sont des paires de conducteurs (aller-retour) parallèles à l'axe commun au rotor et au stator. Deux circuits (phases) sont bobinés sur le stator, avec chacun une géométrie analogue à celle du bobinage rotorique. Les deux phases sont décalées d'une par rapport à l'autre d'un quart de tour.

Q26) Chacune des phases délivre une puissance moyenne $UI \cos \varphi$ où U , I et φ et $\cos \varphi$ sont la tension et l'intensité efficace traversant la phase, ϕ le déphasage entre courant et tension et $\cos \varphi$ le facteur de puissance.. Comme l'alternateur possède deux phases identiques, si celles-ci sont connectées à des charges identiques la puissance totale vaut

$$P = 2UI \cos \varphi$$

En fonctionnement nominal, $P_n = 240 \text{ MW}$, $I_n = 11,1 \text{ kA}$, $\cos \varphi_n = 0,85$, d'où

$$U_n = \frac{P_n}{2I_n \cos \varphi_n} = \frac{240 \times 10^6}{2 \times 11,1 \times 10^3 \times 0,85} = 12,7 \text{ kV}$$

Q27) Un matériau ferromagnétique idéal est caractérisé par une perméabilité magnétique infinie, de sorte que l'excitation magnétique est nulle en tout point du matériau. Un circuit magnétique réalisé dans un ferromagnétique idéal canalise parfaitement les lignes de champ magnétique. À l'interface entre le matériau et un milieu non magnétique (air par exemple, dans le cas d'un entrefer) les lignes de champ côté matériau non magnétique sont orthogonales à l'interface.

La densité d'énergie magnétique dans un matériau ferromagnétique idéal est nulle, de même que l'énergie magnétique qu'il contient. Dans un circuit magnétique avec entrefer, l'énergie magnétique est localisée dans les entrefers.

L'entrefer de l'alternateur est un cylindre délimité par le rotor et le stator, donc les lignes de champ dans l'entrefer sont radiales : $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_r$ si M est un point de l'entrefer.

Dans une machine synchrone dipolaire, le champ magnétique rotorique, de période spatiale 2π tourne à la vitesse angulaire Ω , ce qui génère un flux de pulsation Ω , donc d'après la loi de Faraday une force électromotrice de même pulsation, dans chacun des bobinages du stator, d'où la condition de synchronisme $\Omega = \omega$ pour l'alternateur dipolaire diphasé.

$$\Omega_n = 2\pi f_n = 3,1 \times 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 50 \text{ tr} \cdot \text{s}^{-1} = 3000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$$

Q28) En tenant compte des orientations données par le schéma (\underline{E} en convention générateur, \underline{U} en convention alternateur, associées au fonctionnement alternateur) la loi des mailles appliquée à une phase s'écrit

$$\underline{E} = (R + jX)\underline{I} + \underline{U} = \underline{U} + R\underline{I} + jX\underline{I}$$

Q29) L'équation électrique lors de l'essai à vide (circuit ouvert, $\underline{I} = 0$) se réduit à $\underline{E} = \underline{U}$. La courbe établie lors de l'essai à vide indique une relation linéaire : $\frac{U}{U_n} = A \frac{I_e}{I_{en}}$ où $A = 1,0$. soit la relation

$$E = U_{\text{vide}} = \frac{U_n}{I_{en}} I_e = k I_e$$

L'énoncé donne $I_{en} = 498 \text{ A}$, et $U_n = 12,7 \text{ kV}$ d'après ??, d'où

$$E = k I_e ; k = \frac{U_n}{I_{en}} = \frac{12,7 \times 10^3}{498} = 25,5 \Omega$$

En court-circuit, $\underline{U} = 0$, et l'équation électrique devient $(R + jX)\underline{I}_{cc} = \underline{E}$. On passe aux valeurs efficaces en écrivant la relation en termes de modules (les valeurs efficaces sont égales aux modules au facteur $\sqrt{2}$ près) :

$$\sqrt{R^2 + X^2} I_{cc} = E = k I_e$$

puis on exprime les rapports aux grandeurs nominales

$$\frac{I_{cc}}{I_n} = \frac{k}{\sqrt{R^2 + X^2}} \frac{I_{en}}{I_n} \frac{I_e}{I_{en}}$$

La courbe résultant de l'essai en court-circuit confirme une dépendance linéaire avec un facteur de proportionnalité déduit de la courbe égal à 0,5. Par conséquent

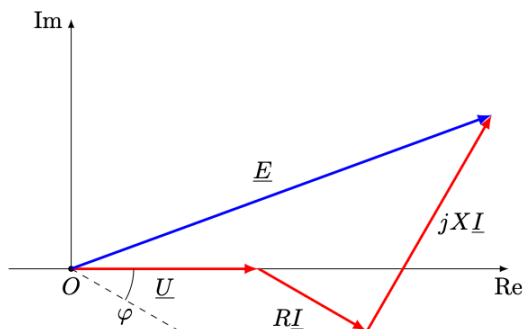
$$\frac{k}{\sqrt{R^2 + X^2}} \frac{I_{en}}{I_n} = \frac{1}{2,0} ; X = \sqrt{\left(2,0k \frac{I_{en}}{I_n}\right)^2 - R^2}$$

$k = 25,5 \Omega$, $I_{en} = 498 \text{ A}$, $I_n = 11,1 \text{ kA}$, $R = 0,9 \Omega$, d'où

$$X = \sqrt{\left(\frac{2 \times 25,5 \times 498}{11,1 \times 10^4}\right)^2 - 0,9^2} = 2,1 \Omega$$

Les valeurs de X et R sont comparables : il n'est a priori pas possible de négliger l'une devant l'autre.

Q30) On reprend la loi des mailles $\underline{E} = R\underline{I} + jX\underline{I} + \underline{U}$, qui conduit au diagramme de Fresnel suivant si le courant est en retard sur \underline{U}



Par projection sur les axes réel et imaginaire ($-\pi/2 < \varphi < 0$) :

$$Re(\underline{E}) = U + RI \cos \varphi - XI \sin \varphi ; Im(\underline{E}) = RI \sin \varphi + XI \cos \varphi$$

d'où

$$E^2 = (U_n + RI_n \cos \varphi - XI_n \sin \varphi)^2 + (RI_n \sin \varphi + XI_n \cos \varphi)^2$$

et

$$E = \sqrt{(U_n + RI_n \cos \varphi_n - XI_n \sin \varphi_n)^2 + (RI_n \sin \varphi_n + XI_n \cos \varphi_n)^2}$$

Pour le facteur de puissance nominal $\cos \varphi_n = 0,85$, avec $-\pi < \varphi_n < 0$ (courant en retard), $\sin \varphi_n = -\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_n} = -0,53$. $U_n = 12,7 \text{ kV}$, $I_n = 11,1 \text{ kA}$, $R = 0,9 \Omega$, $X = 2,1 \Omega$, d'où

$$E = 36,6 \text{ kV} ; I_e = \frac{E}{k} = 1,43 \text{ kA}$$

En fonctionnement nominal, l'alternateur débite une intensité I_n non nulle, donc il existe une chute de tension associée à la résistance et à l'inductance propre du bobinage statorique : $E > U_n$.

II - Raccordement au réseau - compensateur synchrone

Q31) La tension U_n et la fréquence f sont imposées par le réseau. La puissance mécanique $\Gamma\Omega$ est constante car $\Omega = 2\pi f$ imposé par la condition de synchronisme est constant en fonctionnement stationnaire et le couple fourni par les turbine est supposé constant, donc en négligeant les pertes, la puissance électrique est imposée par la puissance mécanique et reste constante.

La puissance mécanique vaut $U_n I \cos \varphi$. La longueur du segment $O'A$ du diagramme de Fresnel vaut

$$O'A = X|I| \cos \varphi = \sqrt{2}XI \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}X}{U_n} U_n I \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}X}{U_n} \frac{P}{2} = \frac{X}{\sqrt{2}U_n} P$$

Comme U_n est imposé par le réseau et X est fixé, $O'A$ est proportionnel à P , avec une constante de proportionnalité égale à

$$\frac{X}{\sqrt{2}U_n}$$

Puisque la puissance électrique est constante, le segment $O'A$ est fixé indépendamment de la charge. Comme A est la projection orthogonale de M sur l'axe vertical passant par O' , les points de fonctionnement M sont situés sur la droite horizontale passant par A .

Le déplacement du point de fonctionnement correspond à une modification de la force électromotrice $E = kI_e$, donc on peut déplacer le point de fonctionnement en modifiant le courant d'excitation I_e .

Q32) Le point M' symétrique de M par rapport à la verticale passant par O' est caractérisé par une même puissance et une même intensité statorique.

Par construction $\varphi' = -\varphi$

La relation de la question ?? reste valide avec $R = 0$, et en tenant compte du changement d'orientation de ϕ qui désigne le retard du courant sur la tension :

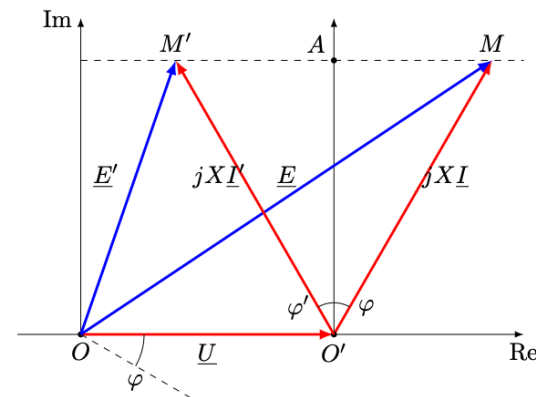
$$E^2 = (U_n + XI \sin \varphi)^2 + (XI \cos \varphi)^2 = U_n^2 + 2XI \sin \varphi + (XI)^2$$

L'énoncé ne précise pas quel point M doit être considéré pour le calcul. On suppose dans la suite que le point M correspond au fonctionnement nominal, et que la résistance R est négligeable, bien que ce ne soit pas le cas (je ne vois pas ce qu'il est possible de calculer sinon)

Comme R n'est pas négligeable, on ne peut pas utiliser la valeur de E calculée précédemment en fonctionnement nominal. On reprend les valeurs données $I_n = 11,1 \text{ kA}$, $\cos \varphi_n = 0,85$ et calculées $U_n = 12,7 \text{ kV}$, $X = 2,1 \Omega$ et $\sin \varphi = 0,53$, pour calculer

$$E = 32 \text{ kV}, I_e = 1,25 \text{ kA} ; E' = 20 \text{ kV}, I_e' = 0,78 \text{ kA}$$

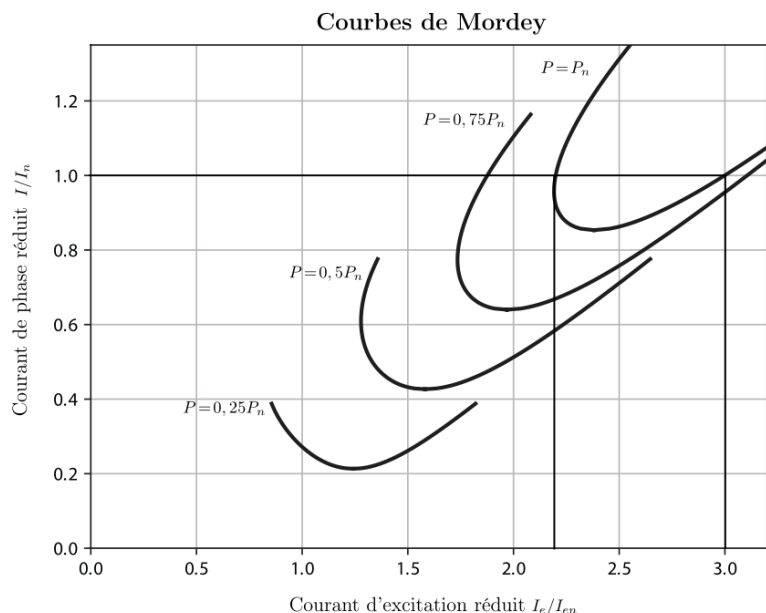
On constate que la valeur de E ne correspond pas exactement à la valeur calculée précédemment, ce qui confirme l'influence non négligeable de R .



Remarque : On peut écrire en sommant les expressions de E et E' , avec $\varphi' = -\varphi$

$$E^2 + E'^2 = 2(U_n^2 + (XI)^2)$$

Q33)



On trace les intersections de l'horizontale associée au courant de phase nominal : $I/I_n = 1$ avec la courbe de Mordey associée à la puissance nominale $P = P_n$. On lit les courants d'excitation réduits correspondants : $I_e/I_{en} = 2,2$ et $I_e/I_{en} = 3,0$, d'où, comme $I_{en} = 498$ A les valeurs des courants d'excitation et des forces électromotrices

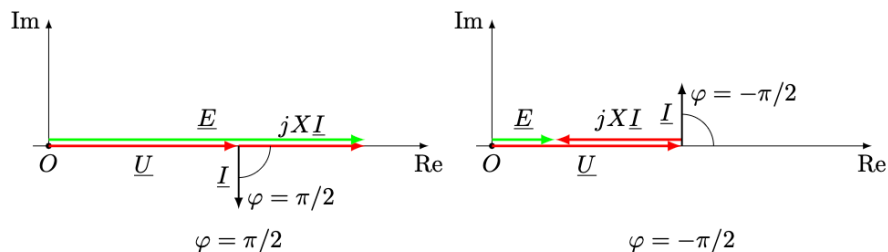
$$I_e = 1,1 \text{ kA}, E = 28 \text{ kV} \quad ; \quad I_e = 1,5 \text{ kA}, E = 38 \text{ kV}$$

On ne retrouve pas les valeurs précédentes (voir ci-dessous). Comme indiqué précédemment $\varphi' = -\varphi$ (ou j'ai raté un point ?)

Remarque : En traçant les courbes de Mordey grâce à un script Python, on constate que les courbes de l'énoncé tiennent compte de la valeur de R , contrairement au calcul effectué à la question précédente. Ces deux questions sont à mon sens très mal posées.

Q34) Si l'alternateur tourne à vide, la puissance mécanique échangée est nulle : $P = 0$, donc $A = O'$. On en déduit $\varphi = \pi/2$ et $\varphi' = -\pi/2$. Dans ce cas

$$E = U_n + XI = U_n + XI = U_n + \frac{XI_n}{10} = 15,2 \text{ kV} \quad ; \quad E' = U_n - XI = U_n - \frac{XI_n}{10} = 10,1 \text{ kV}$$



Le moteur se comporte comme un condensateur ($Z_C = 1/(jC\omega)$), soit un courant en avance de phase de $\pi/2$ sur la tension si $\varphi = -\pi/2$ (φ correspond au retard de phase du courant), donc si $E = 10,1$ kV.

L'intérêt de ce fonctionnement en condensateur est de permettre de relever le facteur de puissance d'un réseau électrique, la plupart des consommations électriques étant de type inductif (moteurs électriques).

Centrale 2021 PSI – Moteur synchrone

III Générateur

III.A -

Q17.

— on identifie les plans de symétrie : $\Pi_s = (Oyz)$ et d'antisymétrie $\Pi_a = (Ozx)$ des courants, ce qui permet d'écrire dans l'entrefer dans lequel $\vec{B} = B(\theta)\vec{e}_r$

— pour deux points $M(\theta)$ et $M'(\theta' = -\theta)$ symétriques par rapport à Π_a , $\vec{B}(M') = \text{sym}(\vec{B}(M))$:

$$B(-\theta) = B(\theta)$$

— pour deux points $M(\theta)$ et $M'(\theta' = \pi - \theta)$ symétriques par rapport à Π_s , $\vec{B}(M') = -\text{sym}(\vec{B}(M))$:

$$B(\pi - \theta) = -B(\theta)$$

— les lignes de champ respectent les symétries : elles sont symétriques par rapport à Π_a et antisymétriques par rapport à Π_s . En particulier la ligne de champ traversant l'entrefer à l'angle θ , traverse également l'entrefer dans le sens opposé à l'angle $\pi - \theta$.

— on considère la ligne de champ orientée dans le sens direct traversant l'entrefer à l'angle $0 < \theta < \pi/2$. Le théorème d'Ampère appliqué à cette ligne de champ s'écrit, dans l'hypothèse de milieux ferromagnétiques idéaux ($H_{\text{ferro}} = 0$) :

$$I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\frac{D_i}{2}}^{\frac{D_i}{2}+e} H(\theta)\vec{e}_r \cdot dr\vec{e}_r + \int_{\frac{D_i}{2}+e}^{\frac{D_i}{2}} H(\pi-\theta)\vec{e}_r \cdot dr\vec{e}_r = H(\theta)e - H(\pi-\theta)e = 2H(\theta)e$$

— D'après la relation constitutive de l'air, $H_{\text{entrefer}} = B_{\text{entrefer}}/\mu_0$, soit finalement :

$$B(0 < \theta < \pi/2) = \frac{\mu_0 I}{2e}$$

— en utilisant une dernière fois les symétries, on obtient la forme du champ dans l'entrefer :

$$B\left(\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mu_0 I}{2e} \vec{e}_r \quad (\text{dirigé vers l'extérieur pour } I > 0)$$

$$B\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\mu_0 I}{2e} \vec{e}_r \quad (\text{dirigé vers l'intérieur pour } I > 0)$$

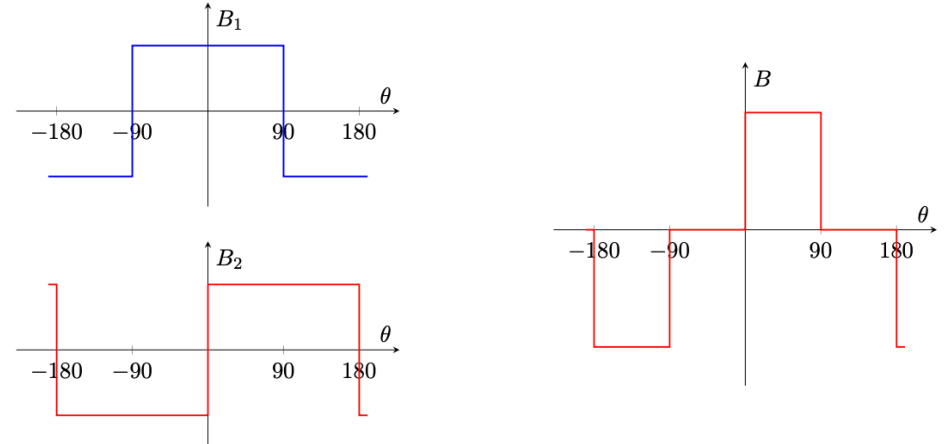
Q18.

— La seconde spire est obtenue par rotation de $\pi/2$ autour de Oz de la première spire, donc le champ $B_2(\theta')$ est identique au champ $B(\theta)$ si θ' est repéré par rapport à l'axe Oy : $\theta' = \theta - \pi/2$, la courbe de $B_2(\theta)$ se déduit de la courbe $B(\theta)$ par une translation de $\pi/2$

$$B_2(0 < \theta < \pi) = \frac{\mu_0 I}{2e} \quad ; \quad B_2(\pi < \theta < 2\pi) = -\frac{\mu_0 I}{2e}$$

— On trace les courbes $B_1(\theta)$ et $B_2(\theta)$ pour les deux spires 1 (axe x) et 2 (axe y)

— Puis la courbe représentative du champ total B par superposition des champs de chaque spire



Q19. Question déconnectée du reste. Si la puissance est constante, la tension et l'intensité traversant l'enroulement sont constantes (en particulier la fem induite doit être un signal triangulaire), d'où $P = UI$ et

$$I = \frac{P}{U} = 21,7 \text{ A}$$

En reportant cette valeur dans l'expression du champ maximal, on trouve

$$B_{\text{max}} = \frac{\mu_0 N I}{2e} = 0,143 \text{ T}$$

III.B -

Q20. Pour un même courant, le champ \vec{B}_{s2} se déduit de \vec{B}_{s1} par une rotation de $\pi/2$ dans le sens direct puisque $\vec{B}_{s2}(I, \theta) = \vec{B}_{s1}(I, \theta - \pi/2)$. Il suffit d'utiliser un enroulement semblable à celui créant \vec{B}_{s1} , tourné par rapport à ce dernier de $\pi/2$ autour de Oz dans le sens direct.

Q21. Le champ total s'écrit

$$\vec{B}_s = \vec{B}_{s1} + \vec{B}_{s2} = \frac{N\mu_0 I_s}{2e} (\cos(\theta) \cos(\omega_s t) + \sin(\theta) \cos(\omega_s t - \phi_2)) \vec{e}_r$$

Si on veut obtenir un champ glissant dans le sens direct, l'intensité traversant l'enroulement (2) décalé spatialement de $\pi/2$ par rapport à l'enroulement (1) dans le sens direct doit être en quadrature retard sur l'intensité traversant l'enroulement (1) : on choisit $\phi_2 = \pi/2$, ce qui conduit à l'expression

$$\vec{B}_s = \frac{N\mu_0 I_s}{2e} (\cos(\theta) \cos(\omega_s t) + \sin(\theta) \cos(\omega_s t - \frac{\pi}{2})) \vec{e}_r$$

$$\vec{B}_s = \frac{N\mu_0 I_s}{2e} (\cos(\theta) \cos(\omega_s t) + \sin(\theta) \sin(\omega_s t)) \vec{e}_r = \frac{N\mu_0 I_s}{2e} \cos(\theta - \omega_s t) \vec{e}_r$$

Par identification :

$$B_t = \frac{N\mu_0 I_s}{2e}$$

III.C -

Q22. On exprime la densité volumique d'énergie magnétique dans l'entrefer :

$$w_{\text{mag}} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \frac{(\vec{B}_s + \vec{B}_r)^2}{2\mu_0} = \frac{B_t^2 \cos^2(\theta - \phi_s) + B_r^2 \cos^2(\theta - \phi_r) + 2B_t B_r \cos(\theta - \phi_s) \cos(\theta - \phi_r)}{2\mu_0}$$

On linéarise cette expression avant de l'intégrer sur le volume de l'entrefer :

$$w_{\text{mag}} = \frac{B_t^2 (1 + \cos(2(\theta - \phi_s))) + B_r^2 (1 + \cos(2(\theta - \phi_r))) + 2B_t B_r (\cos(\phi_r - \phi_s) + \cos(2\theta - \phi_r - \phi_s))}{4\mu_0}$$

L'énergie magnétique s'obtient en intégrant la densité volumique d'énergie sur le volume de l'entrefer :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \iiint w_{\text{mag}}(\theta) r dr d\theta dz$$

Comme w_{mag} ne dépend que de θ , les intégrales sur z et r sont directes :

$$\int_{z_0}^{z_0+L_r} dz \int_{\frac{D_i}{2}}^{\frac{D_i}{2}+e} r dr = L_r \frac{(D_i/2 + e)^2 - (D_i/2)^2}{2} = L_r \frac{D_i e + e^2}{2} \approx \frac{L_r D_i e}{2}$$

Il reste donc

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{L_r D_i e}{2} \int_0^{2\pi} w_{\text{mag}} d\theta$$

L'expression de w_{mag} fait apparaître deux types de termes :

- des constantes, qui sont simplement multipliées par 2π dans l'intégration
- des termes de la forme $\cos(2\theta + \phi)$ de période π . Ces termes sont intégrés sur deux périodes ce qui conduit à une intégrale nulle

On obtient finalement

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{L_r D_i e}{2} \frac{2\pi}{4\mu_0} (B_t^2 + B_r^2 + 2B_t B_r \cos(\phi_r - \phi_s)) = \frac{\pi L_r D_i e}{4\mu_0} (B_t^2 + B_r^2 + 2B_t B_r \cos(\phi_r - \phi_s))$$

et après avoir exprimé $B_t = \frac{\mu_0 N I_s}{2e}$

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{\pi L_r D_i e}{4\mu_0} \left(\left(\frac{\mu_0 N I_s}{2e} \right)^2 + B_r^2 + 2 \left(\frac{\mu_0 N I_s}{2e} \right) B_r \cos(\phi_r - \phi_s) \right)$$

Q23. Le couple exercé sur le rotor a pour expression

$$\Gamma = \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{d\phi_r} = -\frac{\pi L_r D_i e}{4\mu_0} 2 \left(\frac{\mu_0 N I_s}{2e} \right) B_r \sin(\phi_r - \phi_s)$$

soit après simplifications, et introduction de $\delta = \phi_r - \phi_s$

$$\Gamma = -\frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \sin(\phi_r - \phi_s) = -\frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \sin(\delta)$$

Pour $\delta > 0$, le rotor est en avance sur le champ statorique, donc la machine fonctionne en génératrice : le couple magnétique est opposé au mouvement car il y a conversion d'énergie mécanique (l'énergie associée au couple permettant de vaincre le couple magnétique et obtenir le mouvement du rotor) en énergie électrique.

Q24. Pour les valeurs données : $N = 21$, $D_i = 0,53$ m, $L_r = 0,3$ m, $I_s = 22$ A et $B_r = 1,2$ T, le couple maximal obtenu pour $\delta = \pi/2$ (rotor en quadrature avance) vaut 69 N m

III.D -

Q25.

- La justification qualitative serait la conversion idéale d'énergie : la puissance des forces électromotrices dans les bobines statoriques est exactement opposée à la puissance du couple magnétique calculée précédemment :

$$-\Gamma \omega_r = E_1 I_1 + E_2 I_2$$

mais sans calcul difficile d'aller plus loin

- La justification dimensionnelle des expressions des forces électromotrices utilise la relation précédente :

$$\frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \sin(\delta) \omega_r = EI$$

soit à un facteur numérique près

$$E_i = \frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \omega_r$$

- La justification qualitative des dépendances en ϕ_r ne me semble pas évidente sans calcul. On peut cependant remarquer que l'enroulement (2) étant décalé de $\pi/2$ par rapport à l'enroulement (1) dans le sens de rotation, E_2 doit être en quadrature retard sur E_1 , ce qui est vérifié puisque $-\cos(\phi_r) = \sin(\phi_r - \pi/2)$
- On peut justifier la dépendance en ϕ_r est lié au flux du champ rotorique à travers les enroulements du stator. Lorsque $\phi_r = 0$, le plan Oyz est plan d'antisymétrie pour le champ magnétique, donc le champ rotorique est perpendiculaire au plan de la spire équivalente à l'enroulement (1), donc le flux est maximal : on peut écrire $\phi_1 = \phi_0 \cos(\phi_r)$. D'après la loi de Faraday

$$E_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = \phi_0 \omega_r \sin(\phi_r)$$

- En exprimant enfin la conversion électromécanique, avec $I_1 = I_s \cos(\phi_s)$ et $I_2 = I_s \sin(\phi_s)$ (expressions utilisées dans la partie précédente pour calculer le couple) et en notant ϕ_e le déphasage associé à la force électromotrice $E_1 = E_0 \sin(\phi_e)$:

$$\frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \sin(\delta) \omega_r = E_1 I_s \cos(\phi_s) + E_2 I_s \sin(\phi_s)$$

$$\frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \sin(\delta) \omega_r = E_0 I_s (\sin(\phi_e) \cos(\phi_s) + \sin(\phi_e - \pi/2) \sin(\phi_s)) = E_0 I_s \sin(\phi_e - \phi_s)$$

soit par identification, avec $\delta = \phi_r - \phi_s$

$$E_0 = \frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \omega_r ; \phi_e = \phi_s$$

Q26. La loi des mailles s'écrit en notation complexe :

$$\underline{E}_i = (R + R_u + jL\omega_s)\underline{I}$$

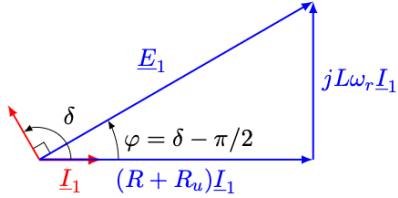
Les E_i s'écrivent en notation complexe

$$E_1 = E_0 \sin(\phi_r) \rightarrow \underline{E}_1 = E_0 e^{j(\phi_r - \pi/2)} ; E_2 = -E_0 \cos(\phi_r) \rightarrow \underline{E}_2 = -E_0 e^{j\phi_r}$$

d'où

$$\underline{I}_1 = \frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4} \frac{e^{j(\phi_r - \pi/2)}}{R + R_u + jL\omega_r} ; \underline{I}_2 = -\frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4} \frac{e^{j\phi_r}}{R + R_u + jL\omega_r}$$

On peut représenter les grandeurs électriques de l'enroulement statorique 1 sur un schéma de Fresnel, en prenant l'intensité comme référence et en faisant figurer l'angle $\delta = \phi_r - \phi_s$, déduit des relations $\underline{I}_1 = I_s e^{j\phi_s}$ et $\underline{E}_1 = E_0 e^{j(\phi_r - \pi/2)}$



On peut séparer amplitude et phase dans les expressions précédentes :

$$\underline{I}_1 = \frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4\sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}} e^{j(\phi_r - \pi/2 - \varphi)} ; \underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-j\pi/2}$$

avec

$$\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega_r}{R + R_u}\right)$$

Cette valeur permet de calculer le décalage entre les positions des maxima des champs rotorique et statorique, qui dépend donc de la charge placée aux bornes des enroulements statoriques.

Q27. Les résultats précédents doivent s'identifier à $I_1 = I_s \cos(\phi_s)$ et $I_2 = I_s \sin(\phi_s)$. On en déduit

$$I_s = \frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4\sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}} ; \phi_r - \frac{\pi}{2} - \varphi = \phi_s$$

soit

$$\delta = \frac{\pi}{2} + \varphi ; \varphi = \arctan\left(\frac{L\omega_r}{R + R_u}\right)$$

On en déduit l'expression du champ magnétique statorique (Q21) :

$$\vec{B}_t = \frac{N\mu_0 I_s}{2e} \cos(\theta - \phi_s) \vec{e}_r = \frac{N\mu_0}{2e} \frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4\sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}} \cos(\theta - \phi_s) \vec{e}_r$$

Puis celle du couple (Q23)

$$\Gamma = -\frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \sin(\delta) = -\left(\frac{\pi N D_i L_r B_r}{4}\right)^2 \omega_r \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \varphi)}{\sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}}$$

et en exprimant $\cos \varphi = (R + R_u) / \sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}$:

$$\Gamma = -\left(\frac{\pi N D_i L_r B_r}{4}\right)^2 \omega_r \frac{R + R_u}{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}$$

Q28. On suppose dans cette question, même si ce n'est pas clairement précisé, que la tension efficace est la tension aux bornes de la charge (en réalité la tension aux bornes d'une charge dépend de celle-ci, et les données concernent usuellement la tension à vide de l'alternateur qui est une constante pour un rotor à aimants permanents). L'énoncé ne précise pas non plus si la puissance donnée correspond aux deux charges identiques connectées aux phases, ou à chacune des charges prise séparément : on suppose qu'il s'agit de la puissance consommée par chacune des charges.

La relation $P = U^2/R_u$ permet de calculer $R_u = U^2/P = 10,6 \Omega$

La loi des mailles permet alors d'obtenir la valeur efficace des forces électromotrices :

$$U = R_u I_s ; E = \sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2} I_s ; E_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}}{R_u} U = 286 \text{ V}$$

soit en amplitude $E = 404 \text{ V}$

Cependant cette valeur ne correspond pas au calcul découlant de la relation

$$E = \frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \omega_r = 988 \text{ V}$$

avec $N = 21$.

Si on conserve la valeur $E_{\text{eff}} = 286 \text{ V}$, plus probable,

$$|\Gamma| = \left(\frac{\pi N D_i L_r B_r}{4}\right)^2 \omega_r \frac{R + R_u}{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2} = \frac{2E_{\text{eff}}^2}{\omega_r} \frac{R + R_u}{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2} = 34,8 \text{ N m}$$

Q29. La période spatiale du champ rotorique vaut $2\pi/p$, donc chaque fois que le rotor tourne d'un angle $2\pi/p$, les bobines statoriques subissent la même interaction avec le rotor, ce qui correspond à une période des phénomènes électriques au stator. Par conséquent la pulsation ω_s vérifie $\omega_s = p\omega_r$ et pour une fréquence $f_s = 50 \text{ Hz}$:

$$\omega_r = \frac{\omega_s}{p} = \frac{2\pi f_s}{p} = 26 \text{ rad s}^{-1}$$

Centrale 2016 PSI – Moteur synchrone à aimants permanents

Très proche du cours

III Remplacement des moteurs asynchrones par des moteurs synchrones à aimants permanents.

Evaluation du couple

III.A Champ magnétique rotorique

III.A.1. Dans le milieu magnétique constituant le rotor, le champ magnétique \vec{B}_r , le champ excitation magnétique \vec{H}_r , et l'aimantation \vec{M}_r sont liés par la relation $\vec{B}_r = \mu_0(\vec{H}_r + \vec{M}_r)$.

III.A.2. On constate que $e=3mm \ll a=150mm$. Donc $x_e = \frac{e}{a} \ll 1$ négligeable devant 1, de même que $\frac{a}{r} \approx 1$ à l'ordre 0. Les expressions proposées du champ magnétique rotorique se simplifient

donc à l'ordre 0 en $\frac{e}{a}$ en:
$$\begin{cases} B_r(r, \theta) = \frac{1}{2}(1)^2(1+1^2)J \cos(\theta - \alpha) = J \cos(\theta - \alpha) \\ B_\theta(r, \theta) = \frac{-1}{2}(1)^2(1-1^2)J \sin(\theta - \alpha) = 0 \end{cases}$$

III.A.3. Avec Ω vitesse angulaire constante, $\alpha(t) = \alpha_{rS} + \Omega t = \Omega t$.

Le champ rotorique s'écrit alors: $B_r(r, \theta) = J \cos(\theta - \Omega t)$; $B_\theta(r, \theta) = 0$

On en déduit la composante radiale du champ dans la direction $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$B_r(r, \theta) = J \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Omega t\right) = J \sin(\Omega t).$$

Le champ rotorique ressenti en $\theta = \frac{\pi}{2}$ est donc au cours du temps sinusoïdal, de période identique à celle de la rotation du rotor.

III.B Champ magnétique statorique

III.B.1. A cause de la différence de perméabilité entre les matériaux ferromagnétiques et l'air de l'entrefer, les conditions de changement de milieu entraînent que le champ magnétique est quasi normal au rotor, c'est-à-dire radial: $\vec{B}_{s1}(r, \theta, t) = B_{s1}(r, \theta, t) \vec{u}_r$ ("les lignes de champs sortent orthogonalement à l'interface dans un entrefer").

Comme de plus $e \ll a$, on considère que sa norme ne dépend pas de r : $\vec{B}_{s1}(r, \theta, t) = B_{s1}(\theta, t) \vec{u}_r$.

Le plan de la spire est un plan de symétrie pour la distribution de courant, et donc un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique.

$\vec{B}_{s1}(M') = -\text{sym}(\vec{B}_{s1}(M))$ pour M' symétrique de M .

Pour calculer le champ magnétique, on utilise le théorème d'Ampère sur le contour suggéré sur la figure ci-contre: $\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i_1$.

A cause de sa perméabilité considérée comme infinie $\vec{H}_{stator} \approx \vec{0}$, c'est-à-dire en réalité:

$$\|\vec{H}_{stator}\| \ll \|\vec{H}_{entrefer}\|.$$

De même $\|\vec{H}_{rotor}\| \ll \|\vec{H}_{entrefer}\|$.

Le théorème d'Ampère permet donc d'écrire en séparant l'intégrale selon les matériaux:

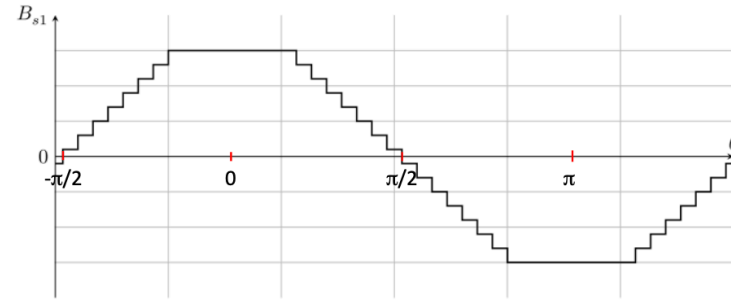
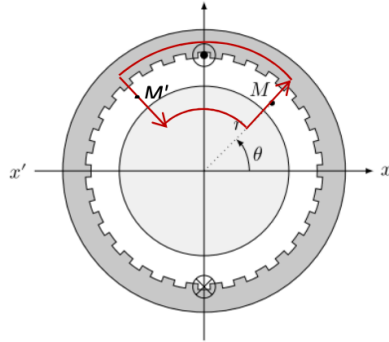
$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Gamma_{rotor}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + 2eH(M) + \int_{\Gamma_{stator}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i_1 \quad \text{d'où } H(M) = \frac{1}{2e} i_1 \text{ et } B(M) = \frac{\mu_0}{2e} i_1$$

Soit $\vec{B}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0}{2e} i_1 \vec{u}_r$ pour $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\vec{B}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0}{2e} i_1 \vec{u}_r$ pour $\theta \in]\pi/2, 3\pi/2[$

III.B.2. Si on fait pivoter la spire autour de l'axe du rotor, la carte de champ magnétique créée par cette spire tourne également.

Si on dispose plusieurs spires obtenues par rotation à partir de la spire étudiée à la question précédente, le champ magnétique total créé sera la somme des champs créés par chaque spire, par superposition (la conservation du flux magnétique et le théorème d'Ampère sont des lois linéaires, et en première approximation, le comportement non linéaire des aimants a été négligé).

On considère des spires régulièrement réparties de façon symétrique de part et d'autre du plan $\theta = \pi/2$. Dans ce cas les angles qui correspondent à un champ nul sont respectivement $-\pi/2$ et $+\pi/2$. On repère 15 sauts semblables entre la valeur maximale et la valeur minimale du champ sur la figure 6. En considérant qu'à chaque spire est associé un saut, il y a donc en tout 15 spires, une dans le plan $\theta = \pi/2$ et 7 de chaque côté, séparées d'un angle $\theta = 2\pi/45$ d'après l'échelle horizontale.



III.B.3. La représentation précédente permet d'approximer $B_{s1}(\theta, t) \approx K_s i_1(t) \cos \theta$.

Le coefficient K_s dépend du nombre de spires, et d'après la question III.B.1, de la taille de l'entrefer (et de la perméabilité magnétique dans l'entrefer).

III.B.4. Le second enroulement est décalé de $+\pi/2$. Donc le champ créé par cet enroulement est $B_{s2}(\theta, t) \approx K_s i_2(t) \cos(\theta - \pi/2) = +K_s i_2(t) \sin \theta$.

Erreur d'énoncé semble-t-il: quadrature retard donc déphasage de $-\pi/2$ pour $i_2(t)$ par rapport à $i_1(t)$.

En remplaçant $i_2(t) = I \cos(\omega_s t + \beta_s - \pi/2)$ qui est en quadrature retard par rapport à $i_1(t)$, on obtient bien $B_{s2}(\theta, t) = K_s I \cos(\omega_s t + \beta_s - \pi/2) \sin \theta = +K_s I \sin(\omega_s t + \beta_s) \sin \theta$.

III.B.5. Le champ résultant est donc:

$B_{s1}(\theta, t) + B_{s2}(\theta, t) = K_s I \cos(\omega_s t + \beta_s) \cos \theta + K_s I \sin(\omega_s t + \beta_s) \sin \theta = K_s I \cos(\omega_s t - \theta + \beta_s)$, dont l'expression en fonction de $\omega_s t - \theta$ est caractéristique d'une onde progressant vers les valeurs croissantes de θ à la vitesse (angulaire) ω_s .

Il s'agit donc d'un champ tournant à la vitesse (angulaire) ω_s vers les valeurs croissantes de θ , d'amplitude $K_s I$.

III.C Energie magnétique dans l'entrefer

III.C.1. La densité volumique d'énergie magnétique dans un milieu de perméabilité relative μ_r est:

$$\frac{B^2}{2\mu_r \mu_0}.$$

III.C.2. On intègre sur le volume de l'entrefer de perméabilité μ_0 (où l'essentiel de l'énergie est stockée):

$$\xi = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \int_{z=0}^{\ell} \int_{r=a}^{a+e} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{(B_r(r, \theta) + B_s(r, \theta, t))^2}{2\mu_0} dr \cdot r d\theta \cdot dz \quad \text{avec } r \approx a, \text{ donc}$$

$$\xi = \frac{\ell e a}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (I \cos(\theta - \Omega t) + K_s I \cos(\omega_s t - \theta + \beta_s))^2 d\theta \quad \text{que l'on sépare en trois contributions:}$$

$$\frac{\ell e a}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (I \cos(\theta - \Omega t))^2 d\theta = \frac{\ell e a}{2\mu_0} I^2 \pi = \frac{V}{4\mu_0} I^2$$

$$\frac{\ell e a}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (K_s I \cos(\omega_s t - \theta + \beta_s))^2 d\theta = \frac{\ell e a}{2\mu_0} (K_s I)^2 \pi = \frac{V}{4\mu_0} (K_s I)^2$$

$$\begin{aligned} & \frac{\ell ea}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (2J \cos(\theta - \Omega t) K_s I \cos(\omega_s t - \theta + \beta_s)) d\theta \\ &= \frac{\ell ea}{2\mu_0} JK_s I \int_{\theta=0}^{2\pi} [\cos(\theta - \Omega t + \omega_s t - \theta + \beta_s) + \cos(\theta - \Omega t - \omega_s t + \theta - \beta_s)] d\theta \\ &= \frac{\ell ea}{2\mu_0} JK_s I \int_{\theta=0}^{2\pi} [\cos(-\Omega t + \omega_s t + \beta_s) + \cos(2\theta - \Omega t - \omega_s t + \theta - \beta_s)] d\theta = \frac{V}{2\mu_0} JK_s I \cos(-\Omega t + \omega_s t + \beta_s) \end{aligned}$$

$$\xi = \frac{V}{4\mu_0} J^2 + \frac{V}{4\mu_0} (K_s I)^2 + \frac{V}{2\mu_0} JK_s I \cos(-\Omega t + \omega_s t + \beta_s)$$

III.D Moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor

III.D.1. A l'instant t, le champ rotorique est maximal en $\theta = \alpha = \Omega t$. Le champ statorique est maximal en $\theta = \omega_s t + \beta_s$.

L'angle entre ces deux positions est

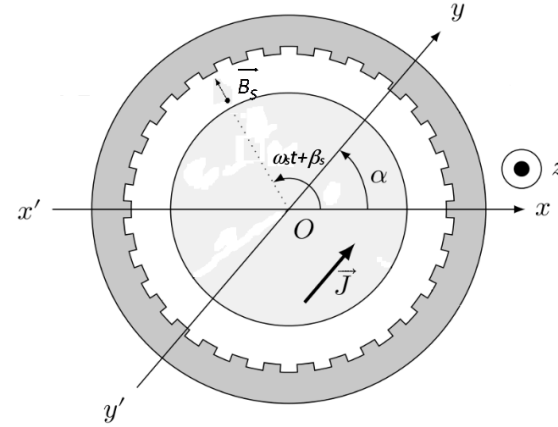
$$\beta = \omega_s t + \beta_s - \Omega t = \omega_s t + \beta_s - \alpha.$$

L'énergie électromagnétique s'écrit donc

$$\xi = \frac{V}{4\mu_0} J^2 + \frac{V}{4\mu_0} (K_s I)^2 + \frac{V}{2\mu_0} JK_s I \cos(\beta).$$

Le couple des forces électromagnétiques exercées sur le rotor est

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = \frac{V}{2\mu_0} JK_s I \sin(\omega_s t + \beta_s - \alpha) \\ &= \frac{V}{2\mu_0} JK_s I \sin(\omega_s t + \beta_s - \Omega t) \end{aligned}$$



III.D.2. Pour que le couple moyen soit non nul, il faut que le rotor et le champ statorique tournent à la même vitesse: condition de synchronisme $\Omega = \omega_s$. De plus pour que le couple soit moteur (positif), il faut que $\sin(\beta) = \sin(\beta_s) > 0$, soit $\beta = \beta_s \in]0, \pi[$: le rotor doit être en retard sur le champ statorique.

III.D.3. L'angle de calage des courants β_s est aussi l'angle entre la direction principale du champ rotorique et la position du rotor, compte tenu de la convention choisie ($t=0$ lorsque $\alpha=0$). Le couple maximal correspond à $\beta_s = \pi/2$. On retrouve la discussion sur les points de fonctionnement A et B compatibles avec un couple donné inférieur au couple maximal.

En raisonnant en régime quasi permanent, si on imagine une perturbation qui augmente β_s à partir du point de fonctionnement A, le couple moteur augmente, le rotor accélère (th du moment cinétique), et donc l'angle β_s diminue. De même si la perturbation diminue β_s , le couple diminue, le rotor décélère, et β_s augmente: le point de fonctionnement A est stable. Au contraire si on tient un raisonnement similaire à partir du point B, on trouve que c'est un point de fonctionnement instable.

