

Partie 1 - Réflexion des ondes ultrasonores

E3A PSI 2016 Modélisation

- C1.** Expliciter la condition aux limites à l'interface pour la pression et montrer qu'elle conduit à la relation :

$$p_{i0} + p_{r0} = p_{t0} \quad (\text{R4})$$

Continuité de la pression au niveau de l'interface :

$$\begin{aligned} p(0^-, t) = p(0^+, t) &\Rightarrow p_{i(0,t)} + p_r(0, t) = p_t(0, t) \\ &\Rightarrow p_{i0} \exp(j\omega_0 t) + p_{r0} \exp(j\omega_0 t) = p_{t0} \exp(j\omega_0 t) \end{aligned}$$

$$\boxed{p_{i0} + p_{r0} = p_{t0}}$$

- C2.** Expliciter la condition aux limites à l'interface pour la vitesse et montrer qu'elle conduit à la relation :

$$v_{i0} + v_{r0} = v_{t0} \quad (\text{R5})$$

Le même raisonnement que précédemment, partant de la continuité de la vitesse de part et d'autre de l'interface, donne la relation annoncée.

- C3.** Dédire des relations (R4) et (R5) les expressions des coefficients de réflexion $r = \frac{v_{r0}}{v_{i0}}$ et de transmission $t = \frac{v_{t0}}{v_{i0}}$ en amplitude, en fonction de Z_1 et de Z_2 .

(R4) :

$$1 + \frac{p_{r0}}{p_{i0}} = \frac{p_{t0}}{p_{i0}} \Rightarrow 1 - \frac{Z_1 v_{r0}}{Z_1 v_{i0}} = \frac{Z_2 v_{t0}}{Z_1 v_{i0}} \Rightarrow 1 - r = \frac{Z_2}{Z_1} t$$

(R5) :

$$1 + \frac{v_{r0}}{v_{i0}} = \frac{v_{t0}}{v_{i0}} \Rightarrow 1 + r = t$$

En sommant les deux expressions précédentes :

$$\left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) t = 2$$

$$\boxed{t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}}$$

$$r = t - 1 = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

- C4.** Quelle est la signification physique du vecteur de Poynting $\vec{\pi}$? Quelle est son unité usuelle ?

Il traduit le déplacement de l'énergie acoustique, et s'exprime en $W \cdot m^{-2}$.

- C5.** Exprimer R et T en fonction de Z_1 et de Z_2 .

$$\| \langle \vec{\pi}_r \rangle \| = \left\| \frac{1}{2} \text{Re}(p_{r0} \exp(j\omega_0 t) v_{r0} \exp(-j\omega_0 t)) \right\| = \frac{1}{2} Z_1 v_{r0}^2$$

De même :

$$\| \langle \vec{\pi}_t \rangle \| = \frac{1}{2} Z_1 v_{i0}^2 \quad \text{et} \quad \| \langle \vec{\pi}_t \rangle \| = \frac{1}{2} Z_2 v_{t0}^2$$

Ainsi :

$$\boxed{R = \frac{v_{r0}^2}{v_{i0}^2} = r^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2}$$

Et :

$$\boxed{T = \frac{Z_2 v_{t0}^2}{Z_1 v_{i0}^2} = \frac{Z_2}{Z_1} t^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}}$$

- C6.** En déduire que $R + T = 1$. Que traduit cette relation ?

$$\boxed{R + T = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 - 2Z_1 Z_2 + 4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 1}$$

Qui traduit la conservation de l'énergie acoustique : toute l'énergie incidente est soit réfléchi, soit transmise.

- C7.** En utilisant les figures 5 et 6, et en expliquant votre raisonnement, déterminer le milieu que le robot autonome détectera le moins. Pour ce milieu, déterminer les valeurs des coefficients de réflexion et de transmission. L'onde est-elle bien réfléchi par les matériaux usuels rencontrés dans une maison ?

Le robot détectera le moins les milieux pour lesquels R sera faible (ie : T proche de 1), c'est-à-dire ceux pour lesquels l'impédance acoustique Z_2 est proche de celle de l'air Z_1 . C'est donc le **polystyrène expansé** qui sera le moins bien détecté, pour

lequel

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{6,0 \cdot 10^3}{4,2 \cdot 10^2} \approx 15$$

D'après le graphe, on aura un coefficient de transmission #0.3 => R#0.7

Pour tous les autres matériaux $\frac{Z_2}{Z_1} > 1000 \Rightarrow T \rightarrow 0$ et $R \rightarrow 1$: ils seront donc bien détectés.

$$\omega_r = \omega_0 \frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}$$

D1. Sachant que les vitesses instantanées incidentes $\vec{v}_i(x, t)$ et réfléchies $\vec{v}_r(x, t)$ vérifient l'équation de d'Alembert à une dimension : $\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \vec{0}$, déterminer la relation reliant ω_0 et k_i ainsi que celle reliant ω_r et k_r .

En injectant les formes proposées pour v_i et v_r on obtient :

$$\begin{aligned} (-jk_i)^2 - \frac{1}{c^2} (j\omega_0)^2 &= 0 \\ (jk_r)^2 - \frac{1}{c^2} (j\omega_r)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{cases} k_i = \frac{\omega_0}{c} \\ k_r = \frac{\omega_r}{c} \end{cases}$$

D2. En considérant qu'au voisinage de l'interface la vitesse de la particule de fluide suivant l'axe (O, \vec{e}_x) est nulle dans le référentiel du laboratoire, déterminer la relation entre ω_0 , ω_r , k_i , k_r et V .

Voisinage de l'interface : $x = x_p = -Vt$

$$\begin{aligned} v(x_p) = 0 &= v_i(x_p) + v_r(x_p) \\ &= v_{i0} \exp(j(\omega_0 t + k_i V t)) + v_{r0} \exp(j(\omega_r t - k_r V t)) \end{aligned}$$

Soit :

$$v_{i0} \exp(j(\omega_0 t + k_i V t)) = -v_{r0} \exp(j(\omega_r t - k_r V t))$$

$$\begin{cases} v_{i0} = -v_{r0} \\ \omega_0 + k_i V = \omega_r - k_r V \end{cases}$$

D3. En déduire que la pulsation ω_r de l'onde reçue par le récepteur à ultrasons, après réflexion de l'onde sonore émise à la pulsation ω_0 sur un obstacle mobile à la vitesse V est :

$$\omega_r = \omega_0 \frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}$$

En utilisant les relations des question D1 et D2 :

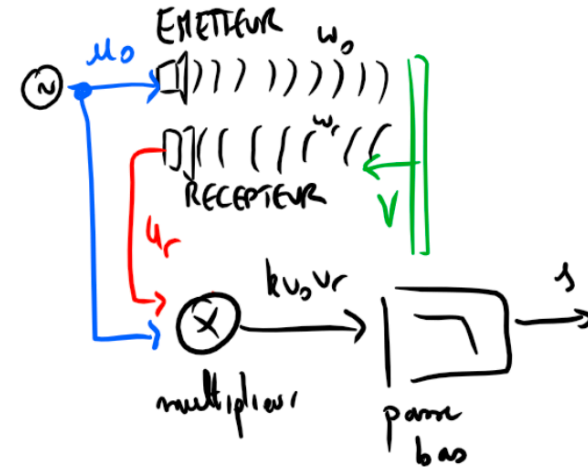
$$\omega_0 \left(1 + \frac{V}{c}\right) = \omega_r \left(1 - \frac{V}{c}\right)$$

D4. Dans le cas où l'obstacle mobile est un chien voulant jouer avec le robot et se déplaçant à une vitesse de $V = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ vers ce dernier, justifier la relation : $\omega_r \approx \omega_0 \left(1 + 2\frac{V}{c}\right)$.

$V = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \ll c \Rightarrow \frac{V}{c} \ll 1$ et on peut effectuer des DL à l'ordre 1 :

$$\omega_r = \omega_0 \frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c}\right) \times \left(1 + \frac{V}{c}\right) = \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c}\right)^2 \approx \omega_0 \left(1 + \frac{2V}{c}\right)$$

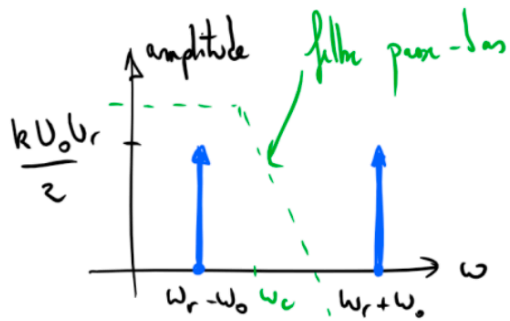
D5. Représenter sur un schéma-bloc les opérations effectuées sur les signaux $u_0(t)$ et $u_r(t)$ par la détection hétérodyne pour obtenir un signal dont l'amplitude est proportionnelle à la vitesse V recherchée.



D6. Exprimer $u_e(t)$ comme une somme de composantes harmoniques puis représenter l'allure de son spectre en pulsation.

$$u_e = kU_0 \cos(\omega_0 t) U_r \cos(\omega_r t + \varphi)$$

$$u_e = \frac{kU_0 U_r}{2} (\cos((\omega_r + \omega_0)t + \varphi) + \cos((\omega_r - \omega_0)t + \varphi))$$



D7. Dans le cas où l'obstacle mobile est un chien voulant jouer avec le robot et se déplaçant à une vitesse de $V = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, avec $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $f_0 = 40 \text{ kHz}$, on désire ne conserver que la composante $\omega_r - \omega_0$ pour accéder à la valeur de V . Justifier ce choix. En déduire la nature du filtre nécessaire. Dans quel domaine de valeurs numériques doit se situer la pulsation de coupure ?

$$\omega_r - \omega_0 = \frac{2V\omega_0}{c} \text{ comporte bien l'information de vitesse}$$

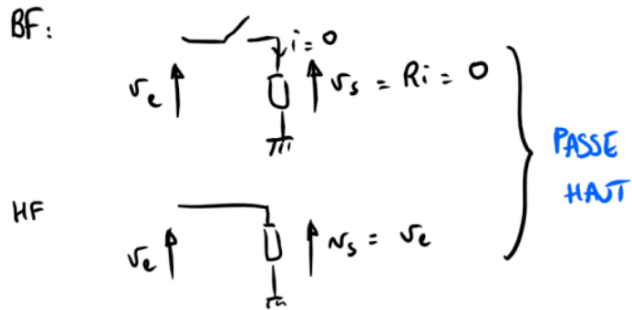
⇒ On va donc utiliser un **filtre passe bas** de pulsation de coupure ω_c telle que :

$$\frac{2V\omega_0}{c} \ll \omega_c \ll \omega_0 + \omega_r$$

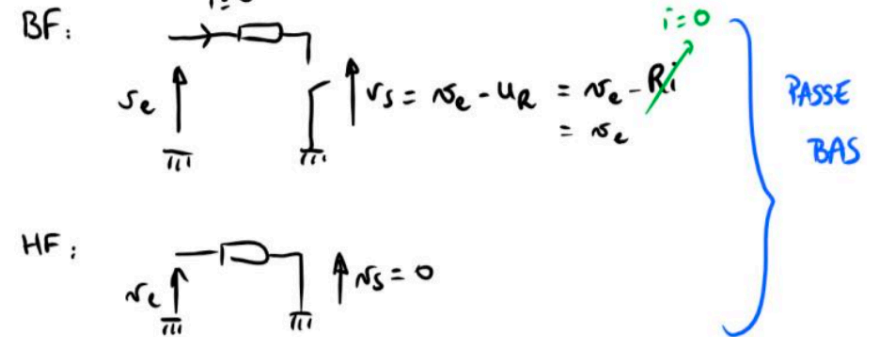
$$1.5 \text{ krad} \cdot \text{s}^{-1} \ll \omega_c \ll 500 \text{ krad} \cdot \text{s}^{-1}$$

D8. Analyser le comportement à basses et hautes fréquences des 3 quadripôles. Lequel de ces quadripôles réalise la fonction de filtrage désirée ?

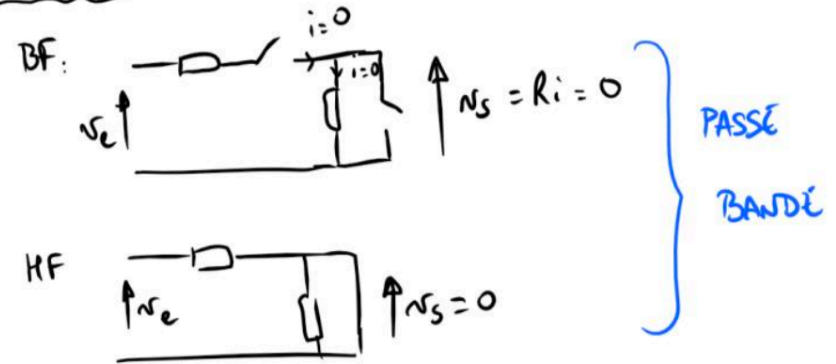
FILTRE 1



FILTRE 2



FILTRE 3



On choisit donc le **filtre 2**.

D9. Déterminer l'expression de la fonction de transfert harmonique du filtre choisi. Exprimer la pulsation de coupure ω_c du filtre en fonction de R et C .

Par pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + RCj\omega} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

D10. On désire atténuer d'un facteur 100 l'amplitude de la composante haute fréquence du signal $u_e(t)$, déterminer la valeur de la pulsation de coupure ω_c du filtre. Quel est alors la valeur du facteur d'atténuation de la composante basse fréquence du signal ? Commenter.

$$\begin{aligned} \text{Il faut } |\underline{H}(j(\omega_0 + \omega_r))| &\approx |\underline{H}(2j\omega_0)| = \frac{1}{100} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\omega_0^2}{\omega_c^2}}} = \frac{1}{100} \\ 1 + \frac{4\omega_0^2}{\omega_c^2} &= 10^4 \approx \frac{4\omega_0^2}{\omega_c^2} \end{aligned}$$

$$\omega_c = \frac{\omega_0}{50} \approx 5 \text{krad.s}^{-1}$$

La composante BF est alors multipliée par :

$$\left| \underline{H}\left(\frac{j2\omega_0 v}{c}\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\omega_0^2 v^2}{c^2 \omega_c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\omega_0^2 v^2}{c^2 \omega_0^2} 50^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4v^2}{c^2} 50^2}} \approx 0,96$$

Elle est donc très peu atténuée, et est bien retrouvée en sortie du filtre passe-bas.

Partie 2 - Transmission à l'entrée d'une fibre optique

CCINP PC 2018

Q43. Dans un milieu neutre (comme ici un diélectrique), on peut utiliser la structure d'OPPM et les relations entre \vec{k} , \vec{E} et \vec{B} en remplaçant simplement c par $\frac{c}{n}$. On a déjà la relation de dispersion : $\vec{k}_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$, et on peut écrire $\vec{B}_1 = \frac{\vec{k}_1 \wedge \vec{E}_1}{\omega}$, ce qui donne :

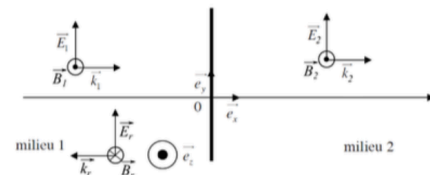
$$\vec{B}_1 = \frac{n_1}{c} \underline{E}_{01} e^{j(\omega t - k_1 x)} \vec{e}_z$$

Question un peu imprécise : l'énoncé demande \vec{B}_1 mais on attend plutôt sa représentation complexe \underline{B}_1 car le champ électrique est donné sous forme complexe et la suite de l'énoncé fait calculer le vecteur de POYNTING moyen à partir des complexes.

Q44. Pour l'onde réfléchie, $\vec{k}_r = -\vec{k}_1 = -n_1 \frac{\omega}{c} \vec{e}_x$ et $\vec{B}_r = -\frac{n_1}{c} \underline{E}_{0r} e^{j(\omega t + k_1 x)} \vec{e}_z$.

Q45. La continuité des champs en $x = 0$ donne (les $e^{(\dots)}$ et les $\frac{1}{c}$ se simplifient) :

$$\begin{cases} \underline{E}_{01} + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{02} & (1) \\ n_1 \underline{E}_{01} - n_1 \underline{E}_{0r} = n_2 \underline{E}_{02} & (2) \end{cases}$$



On fait $n_1 \times (1) + (2)$: $2n_1 \underline{E}_{01} = (n_1 + n_2) \underline{E}_{02}$, ce qui donne $\underline{E}_{02} = \tau \underline{E}_{01}$ avec $\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$ le coefficient de transmission en amplitude. Les indices sont réels, donc τ est réel et positif, donc il n'y a **pas de déphasage** à la transmission.

Q46. Avec la formule fournie, on trouve $\langle \vec{R}_1 \rangle = \frac{n_1}{2\mu_0 c} \underline{E}_{01} \underline{E}_{01}^* \vec{e}_x$ et $\langle \vec{R}_2 \rangle = \frac{n_2}{2\mu_0 c} \underline{E}_{02} \underline{E}_{02}^* \vec{e}_x$.

Le coefficient de transmission en puissance s'écrit donc $T = \frac{\langle \vec{R}_2 \rangle \cdot \vec{e}_x}{\langle \vec{R}_1 \rangle \cdot \vec{e}_x} = \frac{n_2 \underline{E}_{02} \underline{E}_{02}^*}{n_1 \underline{E}_{01} \underline{E}_{01}^*}$, soit $T = \frac{n_2}{n_1} \tau^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$.

Q47. Application numérique : $T^2 = 0,92$ (car il y a 2 dioptries), soit $-0,36$ dB : l'atténuation est faible, sans être tout à fait négligeable.

Partie 3 - Suspension magnétorhéologique

CCINP PSI 2016 Modélisation

Q16. Les particules ferromagnétiques s'aimantent dans le direction du champ magnétique et sont assimilables à des dipôles magnétiques de même orientation. L'interaction dipôle-dipôle les poussent ensuite à s'agréger, le pôle sud d'une particule s'accrochant au pôle nord de sa voisine.

Q17. La réponse est linéaire pour $V \leq 100$ (mm/s). C'est à peu près acceptable, 100 mm/s étant justement la vitesse caractéristique du piston (cf données en début de partie 3).

Q18. Le temps de formation est faible devant le temps de réponse exigée par le cahier des charges pour le système complet, c'est donc acceptable.

Q19. cours.

Q20. cours.

Q21. cours.

Q22. cours $\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$ avec \vec{u}_z axe du solénoïde et en admettant que le solénoïde est sans noyau de fer (non précisé).

Q23. Les lignes de champ à l'intérieur du solénoïde sont des droites parallèles à Oz.

Q24. $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}$ est à flux conservatif. L'évasement des lignes de champs traduit une diminution de l'intensité du champ, et réciproquement pour un resserrement.

Q25. $\varphi = B\pi\delta^2$, \vec{B} étant uniforme et orthogonal aux sections.

Q26. $\Phi_p = N_t \varphi = N_t \pi \delta^2 \mu_0 N_t / l i = L_p i$ avec $L_p = \frac{\mu_0 N_t^2 \pi \delta^2}{l}$

Q27. Les champs \vec{H} et \vec{B} sont bien colinéaires à l'axe de la bobine qui les crée et au matériau magnétique qui les canalise.

L'uniformité le long de la branche centrale de section constante se justifie par la conservation du flux magnétique.

Enfin, comme l'entrefer est fin ($e \ll h$ et r_m) et que les lignes de champ sortent orthogonalement à la surface du ferromagnétique, on peut y négliger l'évasement des tubes de champ, d'où l'uniformité de B et H dans l'entrefer.

Q28. $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

Q29. Conservation du flux magnétique : $B_1 S_1 = 2\pi r_m h B_3$

Q30. Avec les valeurs proposées, on a $B_1 = 1,7 B_3$ (même ordre de grandeur). Ainsi et comme $\mu_1 \gg \mu_2$, on peut négliger l'excitation magnétique dans le ferromagnétique :

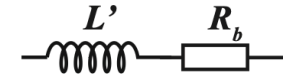
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2e H_3$$

Q31. Théorème d'Ampère sur le contour C : $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2e H_3 = N i$ d'où $H_3 = \frac{N i}{2e}$.

Comme α dépend de H_3 , i permet de contrôler α .

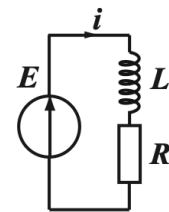
Q32. $B_3 = \mu_0 \mu_2 H_3$ donc le champ dans la bobine $B_1 = \mu_2 \mu_0 \frac{N i \pi r_m h}{2e S_1}$ est μ_2 fois plus grand qu'en l'absence de fluide; il en est donc de même pour l'inductance $L' = N S_1 B_1 / i$ donc $L' = \mu_2 L_0$.

Q33. On choisit un modèle série :



L' modélise l'autoinduction et R_b les pertes cuivres dans l'enroulement et éventuellement les pertes fer (négligées d'après l'énoncé).

Q34.



Loi de maille : $E = R_b i + L' \frac{di}{dt}$

d'où $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L'}$ avec $\tau = \frac{L'}{R_b}$

Q35. En relevant les temps de réponse à 63 % : $\frac{\tau_{\text{avec fluide}}}{\tau_{\text{sans fluide}}} \approx 2,5 = \mu_2$. On retrouve bien $L' = \mu_2 L_0$.

Q36. Le temps de réponse à 5 % du système comprenant le fluide est de $t_{5\%} = 3\tau \approx 24$ ms, inférieur au temps de réponse imposé par le cahier de charges.