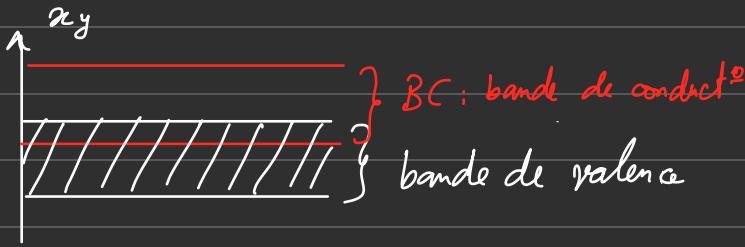




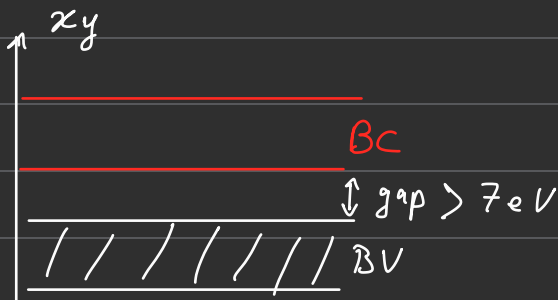
# Représentation énergétique dans les solides:

- matériaux conducteurs:



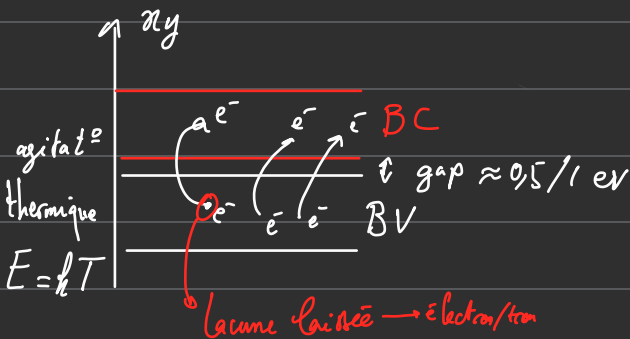
Recouvrement de la BV et BC à  $T_{\text{ambiante}}$ , les  $e^-$  sont présents dans la BC. Ils sont alors délocalisés  $\Rightarrow$  gaz d' $e^-$  libres et grande densité d' $e^-$  libres  $\approx 10^{28} e^-/m^3$

- matériaux isolants:



Il est quasi impossible pour les  $e^-$  de la BV de passer dans la BC

- matériaux semi-conducteurs:

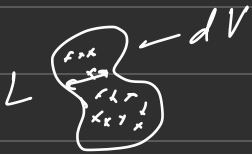


$$n_{e^-} = n_{e^-} / \text{cm}^3 \approx 10^{12} m^{-3}$$

# I / Conservat° de la charge :

## 1) Porteurs de charges dans l'approx des milieux continus :

Echelle mésoscopique : entre micro et macroscopique adapté à la description d'un milieu continu, avec un grand nombre d'entités individuelles.  
Echelle qui permet de bien définir des grandeurs locales



Estimons la densité électronique pour un métal et la taille de cette échelle:

nbres de Cu par  $m^3$ ?

$$n_{Cu} = \frac{\mu}{M} \times N_A$$

nbres de mol.  $m^{-3}$

1 atome de Cu libère 1  $e^-$  dans la BC

$$n_{e^-} = 1 \times n_{Cu}$$

↑ : densité électronique = nbre d' $e^-/m^3$

$$n_{e^-} = \frac{\mu}{M} N_A = \frac{8,94 \times 10^3}{63,5 \cdot 10^{-3}} \times 6 \cdot 10^{23} = 10^{29} m^{-3} \quad \text{À connaître}$$

Prendons un volume mésoscopique de taille  $L = 10 \text{ nm}$

$$N_{e^-} = n_{e^-} \times L^3 = 10^{29} \times 10^{24} = 10^5$$

↳ nbre d' $e^-$  dans ce volume  $dV$

# 1. 1. Modéliser une distribution de charges électriques :

Distribution volumique : densité de particules

$$n = \frac{dN}{dV}$$

↳ nbre de pts  
↳ en  $m^{-3}$   
↳ volume élémentaire  
 $\Leftrightarrow dN = n dV$

• densité de charges (volumique) :

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

densité de charges  
(nbres de charges par unité de volume)

Avec chaque porteur de charge qui a une charge  $+q$ .

$$\text{On a } dq = q dN$$

$$\text{Donc } \rho = \frac{dq}{dV} = q \left( \frac{dN}{dV} \right)_n$$

$$\rho = nq$$

⚠ il existe :

- densité surfacique de charges

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

en  $C \cdot m^{-2}$

↳ certaine surface

- densité linéique de charge

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

en  $C \cdot m^{-1}$



## 1.2. Vecteur densité de courant élec. et intensité élec. :



Porteurs de charge qui se déplacent avec une vitesse uniforme, ils portent la charge  $q$  et leur densité est  $n \implies$  densité de porteurs de charges.

Quel est le nombre de porteurs  $dN$  qui traversent la surface  $S$  pdt  $dt$  ?

Elles sont contenues dans le volume élémentaire efficace  $dV$

$$dV = S dl = S v dt$$

$$\text{donc } dN = n dV = n S v dt$$

La qte de charge  $dq$  qui traverse  $S$  pdt  $dt$  est :

$$dq = q dN = q n S v dt$$

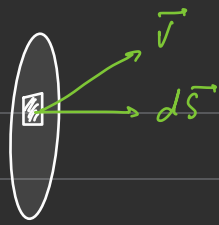
$$\Leftrightarrow dq = e v S dt$$

l'intensité électrique  $i$  : 
$$i = \frac{dq}{dt} = e n v S = j S$$

avec  $\vec{j}$  vecteur densité de courant en  $A \cdot m^{-2}$  !

$$\text{et } \vec{j} = e \vec{v} = n q \vec{v}$$

Généralisat<sup>o</sup> au cas où  $\vec{v}$  (et donc  $\vec{j}$ ) n'est pas uniforme.



$$\vec{v} \cdot d\vec{S} = \cos \theta v dS$$

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{avec } \vec{j} = \rho \vec{v}$$

Rq) si  $\vec{j}$  uniforme sur  $S$ ! avec  $\vec{j} \parallel d\vec{S}$

$$\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_S j dS = \iint_S j dS$$

$$= j \iint_S dS = j S$$

Ordres de grandeurs :

$$S = 2 \text{ mm}^2$$

$$I = 1 \text{ A}$$

$I = \frac{dq}{dt}$ , Débit d' $e^-$   $D$  qui traversent la surface  $S$  :

$$dq = I dt \text{ et } dq = (-e) D dt$$

$$(-e) D dt = I dt \Rightarrow D = \frac{I}{-e}$$

débit positif

$$D = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{19} \text{ s}^{-1}$$

•  $\vec{j}$  vecteur densité de courant :

$\vec{j} = \rho \vec{v}$   $\vec{j}$  colinéaire à la vitesse de migration des  $e^-$ .

$$\vec{i} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \text{ dans le m\^e sens que } i!$$

Ici,  $j$  est uniforme :  $j = \frac{I}{S} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$

Par déf  $\vec{j} = \rho \vec{v}$

avec  $\rho = nq = -ne$

$$v = \frac{j}{\rho} = \frac{j}{ne}$$

A.N!  $v = \frac{5 \cdot 10^3}{10^{29} \times 1.6 \cdot 10^{-19}} \approx \frac{5}{1.6} 10^{-7}$

$v \approx 0,1 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  à retenir

Comparaison avec la vitesse d'agitation thermique  $\Rightarrow$  vitesse quadratique moyenne

Énergie cinétique d'1 particule d'1 gaz, évoluant en 3D :

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} k_B T \text{ par degré de liberté}$$

$$E_c = \frac{3}{2} k_B T = \frac{1}{2} m_e v_g^2$$

$$v_g = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}}$$

À  $T = 20^\circ\text{C} \approx 300\text{K}$

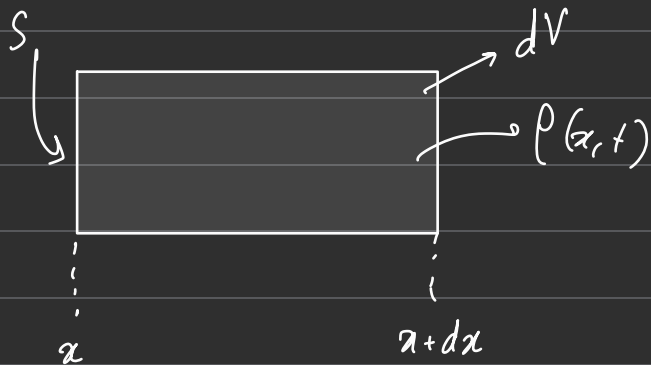
$v_g = 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \gg v_{\text{migration}}$

Rge pour le gp de l'air :  $\pi = 25 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

$$v_g = \sqrt{3 \frac{R}{\pi} T} \approx 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

## 2) Bilan de charge électrique Eq. local de conservat° de la charge:

### 2.1. Conservation de la charge:



Pour le modèle le + simple on considère un problème unidirectionnel et unidimensionnel

$$\vec{j}(x, y, z, t) = j(x, t) \vec{u}_x$$

Page 
$$\vec{q} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

pas d'échange, pas de flux de charge qui traverse la surface latérale

$$(\vec{j} \perp S_{\text{LAT}})$$



Idée: variati° de charge entre  $t+dt$  et  $t$  dans le volume  $dV$ .  
= qté de charges qui entrent  $\ominus$  qté de charges qui sort

→ variati° de la qté de charges entre  $t+dt$  et  $t$  dans  $dV$

$$dq(t+dt) = \rho(x, t+dt) dV$$

$$dq(t) = \rho(x, t) dV$$

$$dq = dq(x, t+dt) - dq(t) \\ = (p(x, t+dt) - p(x, t)) dV$$

DL à l'ordre 1:

$$p(x, t+dt) = p(x, t) + \frac{\delta q}{\delta t} dt$$

$$dq = \left( \cancel{p(x, t)} + \frac{\delta q}{\delta t} dt - \cancel{p(x, t)} \right) dV$$

$$dq = \frac{\delta q}{\delta t} dV dt$$

Évaluons cette variation de charge :

$dq$  avec ses causes  $\Rightarrow$  le courant qui traverse  $dV$

$$dq = dq_e - dq_s \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{qté entrante} \\ \searrow \text{qté sortante} \end{array}$$

(en  $x$ )                      (en  $x+dx$ )

$$dq_e = i(x, t) dt$$

$$dq_s = i(x+dx, t) dt$$

$$\text{avec } i(x, t) = \iint_S \vec{j}(x, t) \cdot d\vec{S}$$

$$i(x, t) = \iint_S j(x, t) \vec{u}_x \cdot dS \vec{u}_x$$

$j(x, t)$  ne dépend que de  $x$  donc  $j(x, t)$  uniforme sur  $S$ !

$$i(x, t) = j(x, t) S$$

$$dq = dq_e - dq_s$$

$$= i(x, t) dt - i(x+dx, t) dt$$

$$= (i(x, t) - i(x+dx, t)) dt$$

$$\begin{aligned}
 dL_1 &= \left( i(x,t) - \left( i(x,t) + \frac{\delta i}{\delta x} dx \right) dt \right) \\
 &= - \frac{\delta i}{\delta x} dx dt \\
 &= - \frac{\delta}{\delta x} (j(x,t) S) dx dt \\
 &= - \frac{\delta j}{\delta x} \frac{S dx}{dV} dt
 \end{aligned}$$

$$dq = - \frac{\delta j}{\delta x} dV dt$$

Bilan local de charges

$$dq = \frac{\delta \rho}{\delta t} dV dt = - \frac{\delta j}{\delta x} dV dt$$

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{\delta j}{\delta x} = 0 \quad \heartsuit$$

↳ Équat<sup>o</sup> de conservat<sup>o</sup> de charges

→ Généralisation à 3D :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{\delta j_x}{\delta x} + \frac{\delta j_y}{\delta y} + \frac{\delta j_z}{\delta z} = 0$$

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad \heartsuit$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\delta A_x}{\delta x} + \frac{\delta A_y}{\delta y} + \frac{\delta A_z}{\delta z}$$

↳ c'est un scalaire

Régime stationnaire:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$

## 2.2. Régime stationnaire:

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow$  la densité de charge ne varie pas.  
 $\Rightarrow$  autant de charge qui entrent et qui sortent

→  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$

$\vec{j}$  est à flux conservatif

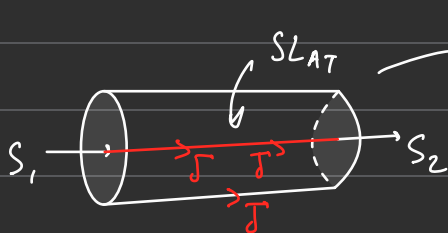
donc  $i = \iint_S \underbrace{\vec{j} \cdot d\vec{S}}_{\text{flux de } \vec{j}}$

$i = I = \text{cte}$  et  $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$

Car formule:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dV = \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0!$$

## → Invariance de l'intensité dans un fil



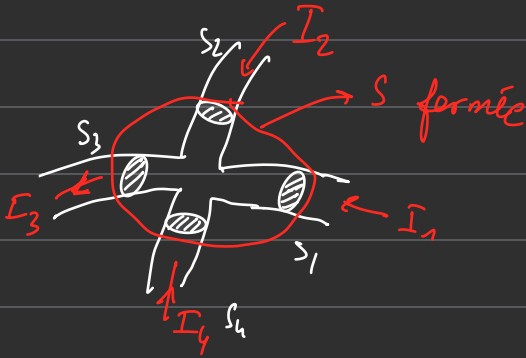
fil = tube de courant défini par une surface fermée

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{LAT}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$= I_1 - I_2$$

$I_1 = I_2 \Rightarrow$  l'intensité ne varie pas le long du fil même si sa section varie car le flux de  $\vec{J}$  est conservatif.

$\rightarrow$  Loi des nœuds :



$$\iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{J} \cdot d\vec{S}_3 + \iint_{S_4} \vec{J} \cdot d\vec{S}_4$$

$$0 = I_1 + I_2 - I_3 + I_4$$

## II / Conducteur Ohmique :

### 1- Loi d'Ohm locale :

$$U = Ri$$

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

$\uparrow$  conductivité

Loi d'Ohm locale

Bon conducteur =  $\gamma = 10^7 \underbrace{\Omega^{-1} \cdot m^{-1}}_{S \cdot m^{-1}}$

### 2) Modèle microscopique de conducteur ohmique : Le modèle de Drude :

#### 2.1. Éléments du modèle de Drude :

- Les ions du réseau cristallin sont fixes: les porteurs de charges ne participent pas à la conduct<sup>o</sup>
- Gaz d'e<sup>-</sup> libres qui ne subissent que des collisions, pas d'autres interact<sup>o</sup>
- Les e<sup>-</sup> sont soumis à 1 champ  $\vec{E}$  uniforme et ct (pas de  $\vec{B}$ )

## 2.2. Modèle de l'e<sup>-</sup> amorti = prise en compte de la force de frottem<sup>t</sup>:

On définit une force  $\vec{F} = -\alpha \vec{v} = -\frac{me}{\tau} \vec{v}$

migrant<sup>o</sup> des e<sup>-</sup>. Cette force modélise l'influence des collisions.  
 et  $\tau$  représente ici le tps d'amortissement.

PDF appliqué à l'e<sup>-</sup>:

avec le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  ( $\frac{mg}{eE} \ll 1$ ) → poids négligeable  
 la force de Lorentz:  $\vec{F}_L = q\vec{E}$  (en l'absence de  $\vec{B}$ )  
 et la force de "frottem<sup>t</sup>":  $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$

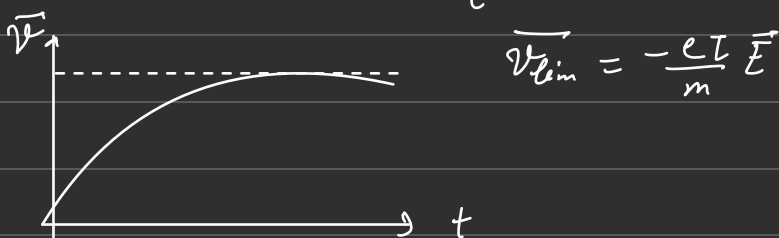
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} - \alpha \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m} \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E} \quad \text{avec: } \tau = \frac{m}{\alpha}$$

donc  $\vec{F} = -\alpha \vec{v} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$



Après le régime transitoire, les  $e^-$  atteignent toute la  $m$  vitesse qui est uniforme et cste.

$$\vec{v} = \frac{-e\tau}{m} \vec{E}$$

donc  $\vec{j} = p \vec{v} = nq \vec{v} = -ne\vec{v}$

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}$$

donc  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$   
avec  $\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$

La conductivité

Rge/ On peut définir la mobilité  $\mu$  des  $e^-$ :  $\vec{v} = \mu \vec{E}$

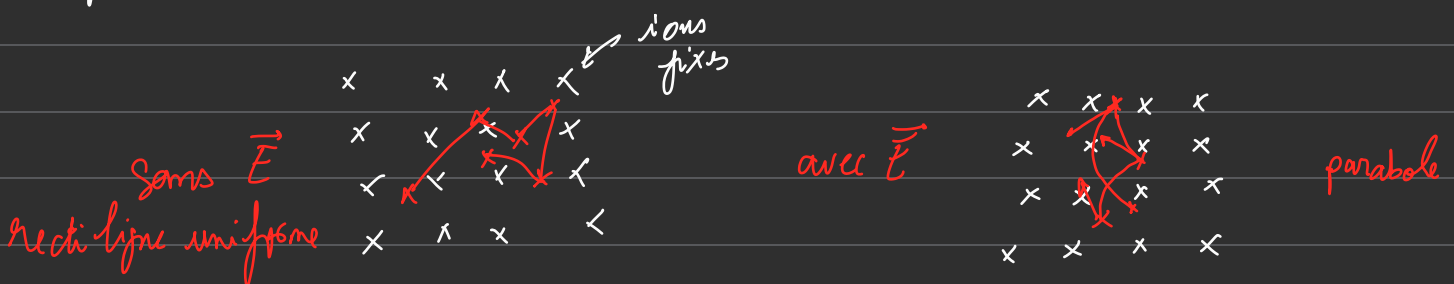
Ordre de grandeurs:  $\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$

Rge/ La loi d'Ohm est valable dans l'ARQS tant que:

$$f \ll \frac{1}{\tau} = 10^{14} \text{ Hz!}$$

### 2.3. Interprétation en terme de collisions:

La force de frottement qui représente les collisions n'est plus prise en cpte.



Appliquons le pFD entre 2 chocs à un  $e^-$  individuel, on prendra  $t=0$  pour ce choc:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_e = -e\vec{E}$$

$$m d\vec{v} = -e \vec{E} dt$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t=0) = -\frac{e\vec{E}}{m} t$$

$$\vec{v}(t) = -\frac{e\vec{E}}{m} t + \vec{v}(t=0)$$

Réalisons la vitesse moyenne sur  $N$  électrons.

$$\langle \vec{v} \rangle = \left\langle -\frac{e\vec{E}}{m} t \right\rangle + \langle \vec{v}(t=0) \rangle$$

↳ vitesse moyenne après un choc

Hypothèse = milieu isotrope  $\rightarrow$  après chaque choc, la vitesse est distribuée aléatoirement en direct° (toutes les direct° sont équiprobables) et en norme  $\Rightarrow \langle \vec{v}(t=0) \rangle = \vec{0}$

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{e\vec{E}}{m} \langle t \rangle$$

avec  $\tau = \langle t \rangle$  le tps moyen entre 2 chocs

$$\text{donc } \langle \vec{v} \rangle = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

En comparant les 2 approches  $\Rightarrow$  temps d'amortissement correspond en fait au tps moyen entre 2 collisions !

## 2.4. Critique du modèle de Drude :

Évaluons le  $l_{pm}$  = libre parcours moyen

$$l_{pm} = v_g \tau$$

avec agitation thermique pour le gaz d'é libre :

$$v_g = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = 5 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\ell_{pm} = 5 \cdot 10^5 \times 10^{-14}$$

$$= 5 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$\ell_{pm} = 5 \text{ nm}$$

Collisions avec les ions?

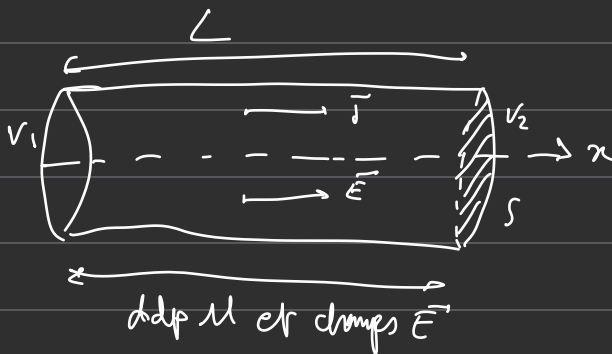
↳ taille caractéristique paramètre de maille  $a \approx 100 \text{ pm}$   
 $\approx 0,1 \text{ nm}$

$$\ell_{pm} \approx 50 a \gg a!$$

Les collisions n'ont pas lieu sur les ions.

Surtout  $v_q$  n'est pas exact  $e^- = \text{gaz de fermion}$  part-quantiques.  
 $v_{fermi}!$

### 3) Résistance d'un conducteur ohmique:



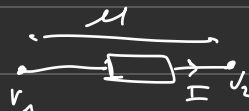
$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS$$

On admet les équ. de Maxwell en régime stationnaire imposent:

$$\vec{E} = -\text{grad } V \Leftrightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Appliquons la relation précédente ici:  
 ici  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  sont uniformes



$$U = EL$$

↳ V.m<sup>-1</sup>

Loi d'Ohm  $\Rightarrow U = RI$

$$R = \frac{U}{I} \quad | \quad \text{avec } U = EL$$

$$I = j's = \gamma E S$$

$$R = \frac{\cancel{E}L}{\gamma \cancel{E} S} = \boxed{\frac{L}{\gamma S}} \quad \rho$$

A.N de la R d'un fil de Labo:

$$L = 1 \text{ m} \quad \gamma = 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$S = 1 \text{ mm}^2$$

$$R = \frac{1}{10^7 \times 10^{-6}} = 0,1 \, \Omega \Rightarrow \text{négligeable}$$

Méthode générale en géométrie quelconque pour déterminer R:

→ on utilise  $I = \text{cte}$  en régime stationnaire  
avec  $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$  et  $\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\gamma \text{grad} V$

et on utilise:  $U = R I$

→ deuxième méthode équivalente  
on différencie  $U = R I \Rightarrow dV = dR \times I$  ← cte

$$dR = \frac{|dV|}{I}$$

→ résistance élémentaire  
d'un volume  $dV$  de conducteur

avec  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{p}$

$$\text{et } I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = \iint_S \gamma \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$dR = \frac{|\vec{E}| d\ell}{\iint_S \vec{E} \gamma \cdot d\vec{s}}$$

→ On intègre dR sur le volume du conducteur.